Simulation des géomatériaux par la méthode des éléments Lagrangiens

Modelling of Geomaterials using the Lagrangian Element method

D. BILLAUX

ITASCA Consultants*

P. CUNDALL

ITASCA Consulting Group**

Rev. Franç. Géotech. n° 63, pp. 9-21 (avril 1993)

Résumé

Une formule non-traditionnelle de la méthode des différences finies est présentée. Permettant tout type de maillage, elle rend cette méthode aussi souple que celle des éléments finis. Parce qu'elle est explicite et suit donc le comportement des matériaux au cours de leur réponse à une sollicitation, la formulation présentée est particulièrement efficace pour l'étude des sols fortement non-linéaires, avec de grandes déformations et des zones de plastifications importantes.

Abstract

A "non-classical" formulation of the finite-difference method is presented. It allows any type of discretization, making this method as flexible as the finite-element method. It is explicit in time, and thus follows the behavior of materials during their response to a sollicitation. Because of this, Lagrangian elements are specially efficient for studying soils, highly non-linear, with large strains and sizable plasticity zones.

* 40, avenue de Collongue, 69130 Ecully.

** 1313 Fifth Street SE, Minneapolis, MN 55414 (USA).

1. INTRODUCTION

La modélisation numérique des géomatériaux est une étape nécessaire de l'élaboration de tout projet de génie civil. Elle fait appel à deux grands types de méthodes. D'une part, des méthodes d'équilibre limite permettent de calculer rapidement les efforts maximaux que peut soutenir une structure (pente, fondation, etc.), au prix d'hypothèses souvent simplistes sur le comportement des matériaux et leurs interactions et de la donnée a priori des mécanismes de rupture. D'autre part, des méthodes numériques plus sophistiquées — éléments finis ou différences finies — fournissent les champs d'efforts et de déformations, ainsi que le mécanisme de rupture le plus critique, au prix de calculs beaucoup plus lourds à mettre en œuvre.

Parmi ces dernières, la méthode des éléments finis a depuis longtemps supplanté sa concurrente, la méthode des différences finies à laquelle était surtout reproché son manque de souplesse. En fait, les défauts attribués à la méthode des différences finies étaient liés à la manière dont celle-ci était formulée, et non à son principe même. Par une formulation « non-traditionnelle » de la méthode, on supprime facilement ces défauts et l'on peut bâtir une méthode numérique qui montre de nombreux attraits pour la modélisation des géomatériaux. L'objectif de cet article est de présenter une telle formulation, appelée « méthode des éléments Lagrangiens », et développée au cours des cinq dernières années. Après un rappel des concepts de base, la formulation numérique est décrite de manière détaillée. Une application au calcul d'un remblai renforcé est ensuite présentée. Enfin, la formulation complète d'un problème simple est présentée en annexe, et permet la comparaison de la méthode des éléments finis avec celle des éléments Lagrangiens.

2. CONCEPTS DE BASE

La méthode des éléments Lagrangiens consiste en une application « non-traditionnelle » de la méthode des différences finies explicites. Ses caractéristiques principales sont passées en revue, ainsi que leurs implications pour la modélisation des géomatériaux.

2.1. Les différences finies

La méthode des différences finies est peut-être la plus ancienne technique numérique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations différentielles avec conditions initiales et/ou conditions aux limites (voir par exemple DESAI et CHRISTIAN, 1977). Dans la méthode des différences finies, toute dérivée présente dans le système d'équations est remplacée directement par une expression algébrique écrite en terme des variations intervenant dans le système d'équations, en des lieux discrets de l'espace. Ces variables sont indéterminées partout ailleurs.

Dans la méthode des éléments finis, les contraintes et déplacements (en mécanique) sont définis partout dans le domaine d'étude. Des fonctions spécifiques décrivent

leurs variations dans chaque élément. La formulation consiste alors en l'ajustement de ces fonctions pour minimiser des termes d'erreur ou une énergie locale ou globale.

Les deux méthodes produisent un système d'équations algébriques. Bien qu'elles soient obtenues de manières différentes, ces équations sont similaires et même parfois identiques. Par contre, un certain nombre de « traditions » différentes se sont ancrées au cours des années. Par exemple, les programmes Éléments Finis combinent en général les matrices élémentaires en une matrice de rigidité globale de grande taille, alors que les programmes Différences Finies ne construisent pas de matrice globale car ils peuvent de manière relativement efficace reformuler les équations à chaque pas. Il existe d'autres différences, dont beaucoup sont dues surtout aux habitudes des numériciens.

Enfin, il faut faire un sort à un mythe qui a survécu jusqu'à aujourd'hui. De nombreux professionnels (y compris des auteurs de livres) croient que les différences finies sont cantonnées à des maillages rectangulaires définies en termes de $(\Delta x, \Delta y)$. Ceci est faux ! De fait, WILKINS a présenté (en 1964 !) une méthode qui permet de formuler les équations des différences finies pour des éléments de forme quelconque. C'est cette méthode que nous utilisons. La croyance erronée que les Différences Finies sont inséparables des maillages rectangulaires est responsable de nombreuses affirmations, aussi peu fondées, sur les formes possibles des limites et la distribution des propriétés des matériaux. En utilisant la méthode de WILKINS, on peut donner n'importe quelle forme aux limites et faire varier les propriétés d'un élément à l'autre, exactement comme avec les Éléments Finis.

2.2. La résolution explicite avançant dans le temps

L'objectif de la méthode aux éléments Lagrangiens présentée est de trouver la solution d'un problème statique ou quasi statique. Malgré cela, les équations du mouvement dynamique sont incluses dans la formulation. En effet, ceci permet de s'assurer que le schéma numérique est stable même lorsque le système physique modélisé est instable. Avec des matériaux à comportement non linéaire, des instabilités physiques peuvent survenir : rupture soudaine d'un pilier, d'une pente, par exemple. Dans le monde physique, une partie de l'énergie de déformation accumulée par le système est convertie en énergie cinétique, qui se propage ensuite à partir de la source et se dissipe. Si les termes d'inertie sont inclus dans la formulation numérique, ce processus est reproduit directement : de l'énergie cinétique est engendrée puis dissipée. Un algorithme de résolution « statique » qui n'inclut pas les termes d'inertie doit utiliser une procédure numérique pour modéliser les instabilités physiques. Même si la procédure supprime effectivement les instabilités numériques, le chemin de contraintes et déformations suivi n'est pas forcément réaliste.

La séquence de calcul générale de la méthode est illustrée en figure 1. Les équations du mouvement sont utilisées pour calculer de nouvelles vitesses et donc de

Fig. 1. — Séquence de calcul générale.

Fig. 1. — General calculation sequence.

nouveaux déplacements à partir des contraintes et des forces en jeu. Ensuite les taux de déformation sont déduits des vitesses et la loi de comportement du matériau est utilisée pour déduire de nouvelles contraintes et forces des taux de déformation. Chaque parcours de cette boucle représente un cycle de calcul. Le principe fondamental de la résolution explicite est que chaque boîte de la figure 1 remet à jour toutes les variables qu'elle doit traiter à partir de valeurs connues et qui restent fixées durant les calculs dans la boîte. Par exemple, la boîte inférieure calcule de nouvelles contraintes dans chaque élément à partir des vitesses calculées à l'étape précédente. Ces vitesses sont bloquées durant le fonctionnement de la boîte : les nouvelles contraintes n'affectent pas les vitesses. Cette hypothèse est justifiée si nous choisissons un pas de temps assez petit pour que l'information ne puisse pas passer d'un élément à l'autre au cours de cet intervalle de temps. Puisqu'un parcours de la boucle représente

un pas de temps, le « blocage » des vitesses est alors justifié car des éléments voisins ne peuvent pas s'influencer pendant une période de calcul. Bien entendu, les perturbations peuvent se propager dans le modèle en plusieurs cycles de calcul, à la vitesse que met l'information à se propager physiquement.

Le paragraphe précédent est un exposé des principes de la résolution explicite. La formulation mathématique sera développée plus loin. L'idée de base est que la vitesse de « l'onde de calcul » est toujours supérieure à celle des ondes physiques, de façon que les équations opèrent toujours sur des valeurs connues et figées pour la durée des calculs les utilisant. Cette méthode possède plusieurs avantages importants (et un gros désavantage !) : surtout, aucune itération n'est nécessaire pour calculer les contraintes à partir des déformations dans un élément, même si la loi de comportement est fortement non linéaire. Dans une méthode implicite (de loin le type de méthodes le plus utilisé en Eléments Finis), chaque élément communique avec chaque autre élément pendant un pas de calcul : il est donc nécessaire d'itérer avant de satisfaire à la fois les équations d'équilibre et de compatibilité. Le tableau 1 est une comparaison des méthodes explicites et implicites. On peut voir que le désavantage des méthodes explicites est la condition sur le pas de temps. Avec un pas de temps imposé très petit, il peut être nécessaire d'effectuer un grand nombre de pas avant d'arriver à la solution statique. De ce fait, les méthodes explicites ne sont pas compétitives pour la résolution de problèmes linéaires, en petites déformations. Elles trouvent par contre leur application pour l'étude des systèmes plus complexes, mettant en jeu par exemple des non-linéarités, de grandes déformations ou des instabilités physiques. Les systèmes géomécaniques présentent en général ce type de difficultés.

Tableau 1. — Comparaison des méthodes explicite et implicite (d'après CUNDALL, 1980).

Table 1. — Comparison between explicit and implicit methods (after CUNDALL, 1980).

Explicite	Implicite
Le pas de temps doit être inférieur à une valeur critique pour assurer la stabilité	Pas de restriction sur le pas de temps, au moins pour certains schémas de résolution
Peu de calculs par pas de temps	Nombreux calculs par pas de temps
Par d'amortissement numérique significatif introduit pour les problèmes dynamiques	Amortissement numérique dépendant du temps pour les schémas inconditionnellement stables
Prise en compte de lois de comportement non linéaires sans itérations supplémentaires	Nécessité d'une procédure itérative pour la prise en compte de comportements non linéaires
Si le pas de temps est inférieur à sa valeur critique, une loi non linéaire est toujours suivie d'une manière correcte	Il est toujours nécessaire de démontrer que la procédure est : (a) stable ; et (b) physiquement correcte, c'est-à-dire qu'elle permet de suivre un chemin de contraintes physiquement correct
Aucune matrice n'est construite. La mémoire nécessaire est minimum	Une matrice de rigidité doit être stockée. La mémoire nécessaire est importante
Aucune matrice n'étant construite, des grandes déformations et de grands déplacements peuvent être pris en compte avec quasiment aucun calcul supplémentaire	Des calculs supplémentaires sont nécessaires pour suivre de grandes déformations et de grands déplacements

2.3. L'analyse Lagrangienne

N'ayant pas de matrice de rigidité globale à construire, nous pouvons de manière très simple réactualiser les coordonnées des nœuds à chaque pas de temps. Les déplacements incrémentaux sont ajoutés aux coordonnées et le maillage se déforme donc avec le matériau qu'il représente. La formulation est donc « Lagrangienne », par opposition à la formulation « Eulérienne » pour laquelle le matériau se déforme par rapport à un maillage fixe. L'intérêt de la méthode Lagrangienne est simple : elle permet de traiter les problèmes en grandes déformations de manière à la fois rigoureuse et aisée, en ne pesant que très peu sur la rapidité des calculs.

3. FORMULATION NUMÉRIQUE

Les équations générales sur lesquelles est basée la résolution sont rapidement passées en revue. Les équations aux différences finies en sont déduites. Deux points importants de la méthode sont ensuite détaillés : l'amortissement utilisé et la détermination du pas de temps critique. Les développements exposés ci-dessous concernent la modélisation mécanique. A partir de la loi de FOURIER ou de la loi de DARCY, on peut construire de la même manière les équations aux différences finies permettant de résoudre des problèmes thermiques ou d'hydraulique souterraine.

3.1. Equations générales

Dans un solide déformable et dans un référentiel Lagrangien, la loi de NEWTON peut être exprimée par l'équation différentielle suivante (MALVERN, 1969) :

$$\rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1)$$

où :

Les indices i, j représentent les trois composantes dans un repère cartésien, la répétition d'un indice indiquant une sommation.

ρ est la masse volumique

t est le temps

$\dot{u}$ est le vecteur vitesse

x est le vecteur position

g est l'accélération due aux forces de volume (en général, accélération de la pesanteur)

σ est le tenseur des contraintes.

En plus de l'équation du mouvement ci-dessus, l'étude du solide déformable fait intervenir sa loi de comportement. Celle-ci peut être écrite de manière incrémentale :

$$\sigma : = M(\sigma, \dot{\epsilon}, K) \quad (2)$$

où :

$M(\)$ est la fonctionnelle définissant la loi

$\dot{\epsilon}$ est le tenseur des taux de déformation :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

K est un paramètre dépendant de l'histoire du matériau — une mesure de la déformation plastique de cisaillement par exemple pour un matériau radoucissant ou durcissant.

La notation tel que : = signifie « remplacé par ».

Enfin, à cause de la rotation finie d'une zone pendant un pas de temps, le tenseur des contraintes relatif à un système fixe de coordonnées est modifié :

$$\sigma_{ij} : = \sigma_{ij} + (\omega_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \omega_{kj}) \Delta t \quad (3)$$

où :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Cette dernière équation ne s'applique bien sûr qu'au cas des grandes déformations.

3.2. Equations aux différences finies

Le solide est maillé par des quadrilatères. Chacun d'eux est subdivisé en deux paires d'éléments triangulaires à déformation uniforme (fig. 2). La force exercée sur un nœud est prise comme la moyenne des forces pour les deux paires de triangles, ce qui permet d'assurer une réponse symétrique à un chargement symétrique.

Les équations aux différences finies sont déduites du théorème de GAUSS :

$$\int_s n_i f ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dA \quad (4)$$

où :

s est le périmètre de l'élément de surface A

n est le vecteur unitaire normal à s

f est un scalaire, vecteur ou tenseur défini sur A et son périmètre.

Fig. 2. — Discretisation mixte

a) Quadrilatères superposés ; b) Vecteurs vitesse ; c) Vecteur force nodale.

Fig. 2. — Mixed discretization

a) Overlaid quadrilaterals ; b) Velocity vector ; c) Nodal force vector.

Nous utilisons (4) pour calculer la valeur moyenne du gradient de f sur A , $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle$, en fonction des valeurs de f sur le périmètre s :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle = \frac{1}{A} \int_s n_i f ds \quad (5)$$

Appliquée à un élément triangulaire, cette relation devient:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle = \frac{1}{A} \sum_s \langle f \rangle n_i \Delta s \quad (6)$$

où:

La sommation s'applique aux trois côtés du triangle.

$\langle f \rangle$ est la valeur moyenne de f sur un côté
 Δs est la longueur du côté

L'équation (6) nous permet d'écrire le tenseur taux de déformation $\dot{\epsilon}$ en fonction des vitesses aux nœuds:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \equiv \frac{1}{2A} \sum_s (\dot{u}_i^{(a)} + \dot{u}_i^{(b)}) n_j \Delta s \quad (7)$$

et:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

où a et b sont les deux nœuds extrémités d'un côté du triangle.

L'équation (7), approchée, est exacte si les vitesses varient linéairement entre les nœuds.

L'utilisation d'éléments triangulaires élimine le problème de déformations non restreintes qui se pose avec les éléments quadrilatères à déformation uniforme. Ce problème, pour les polygones à plus de trois sommets, tient au fait qu'il existe des combinaisons des déplacements nodaux qui ne produisent aucune déformation, et donc ne sont restreints par aucune force.

Un autre problème classique de la modélisation de matériaux en plasticité n'est pas résolu par l'utilisation d'éléments triangulaires. Il s'agit de la formulation de la condition d'incompressibilité lors de l'écoulement plastique.

En effet, pour les problèmes axisymétriques ou en déformations planes, cette condition introduit une restriction cinématique dans la direction perpendiculaire au plan d'étude. Les éléments sont alors « surcontraints » (nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues), ce qui donne lieu à des prédictions erronées et optimistes des chargements de rupture. Ce problème a été discuté en détail par NAGTÉGAAL *et al.* (1974). Pour le résoudre, nous utilisons une procédure décrite par MARTI et CUNDALL (1982), la discrétisation mixte. Les parties isotropes des tenseurs de contraintes et de déformations, sur lesquelles s'applique la condition d'incompressibilité, sont supposées constantes sur l'en-

semble d'un quadrilatère, alors que leurs parties déviatoriques sont traitées séparément dans les deux triangles. Pour les deux triangles a et b de la figure 2a, les taux de déformation sont donc ajustés pour rendre égales les parties isotropes sans modifier les parties déviatoriques.

Soient:

$\dot{\epsilon}_{11}^a, \dot{\epsilon}_{22}^a, \dot{\epsilon}_{12}^a, \dot{\epsilon}_{11}^b, \dot{\epsilon}_{22}^b, \dot{\epsilon}_{12}^b$, les composantes,

et

$$\dot{\epsilon}_m = \frac{1}{4} (\dot{\epsilon}_{11}^a + \dot{\epsilon}_{22}^a + \dot{\epsilon}_{11}^b + \dot{\epsilon}_{22}^b)$$

on pose:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11}^* &= \dot{\epsilon}_m + \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{11}^a - \dot{\epsilon}_{22}^a) \\ \dot{\epsilon}_{22}^* &= \dot{\epsilon}_m - \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{11}^a - \dot{\epsilon}_{22}^a) \\ \dot{\epsilon}_{12}^* &= \dot{\epsilon}_{12}^a \end{aligned} \quad (9)$$

Les équations en (b) sont identiques. Des ajustements similaires sont effectués pour les triangles c et d .

Une fois les composantes de $\dot{\epsilon}$ calculées, la loi de comportement (eq. 2) et l'ajustement de rotation (eq. 3) sont utilisés pour déduire un nouveau tenseur de contraintes de ce tenseur taux de déformation. Le tenseur de contraintes obtenu est traité en discrétisation mixte. La contrainte isotrope moyenne dans une paire de triangles est calculée en utilisant une pondération par les aires des triangles. Ce dernier traitement n'a d'effet que si le comportement du matériau est dilatant (auquel cas une déformation de cisaillement provoque une variation de la contrainte isotrope). Sinon, les contraintes isotropes dans les deux triangles sont déjà égales.

En utilisant les notations de la figure 2c, la force appliquée au triangle sur son côté (1) est:

$$F_i^{(1)} = \sigma_{ij} n_j^{(1)} S^{(1)} \quad (10)$$

Cette force est répartie de manière égale entre les deux nœuds extrémités du côté et la force appliquée à un nœud est donc:

$$F_i = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (n_j^{(1)} S^{(1)} + n_j^{(2)} S^{(2)}) \quad (11)$$

Pour chaque paire de triangles, les forces aux nœuds dues aux deux triangles sont additionnées. La force résultante est ensuite prise égale à la moyenne des forces trouvées pour les deux paires. Pour trouver la force totale appliquée à un nœud, nous additionnons les forces dues à tous les quadrilatères dont il fait partie. Le vecteur résultant, que nous appelons ΣF_i , inclut également des chargements éventuels (conditions aux limites), et les forces de volume $F_i^{(g)}$ dues à la gravité:

$$F_i^{(g)} = g m_g \quad (12)$$

où m_i est la masse gravitationnelle concentrée au nœud, égale au tiers de la somme des masses des triangles dont il fait partie.

ΣF_i étant la force nette non équilibrée appliquée au nœud, il reste à appliquer la formulation en différences finies de la loi de NEWTON :

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \Sigma F_i^{(t)} \frac{\Delta t}{m} \quad (13)$$

où les indices supérieurs indiquent l'instant où la variation est évaluée.

En grandes déformations, (13) est à nouveau intégrée pour calculer les nouvelles coordonnées du nœud :

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t \quad (14)$$

Nous avons alors terminé un cycle de calcul, et revenons à l'équation (7) pour en commencer un nouveau. Le processus est répété jusqu'à satisfaction d'un critère de convergence : la force nette non équilibrée maximum sur l'ensemble des nœuds doit devenir inférieure à une valeur fixée par l'utilisateur.

Notons que la formulation exposée ci-dessus résout à chaque pas les équations différences finies en petites déformations, dans un système de référence lié au matériau. L'effet des grandes déformations intervient, après chaque pas, par la modification des coordonnées des nœuds. Le fait que la formulation est incrémentalement en petites déformations simplifie en particulier le traitement de la plasticité.

3.3. Amortissement et pas de temps critique

Il manque deux éléments au processus décrit dans le paragraphe ci-dessus pour constituer un algorithme opérationnel. Tout d'abord, les mouvements doivent être amortis de manière à arriver à l'état stationnaire (équilibre ou écoulement permanent) en un minimum de cycles. Ensuite, nous devons déterminer le pas de temps le plus grand possible qui élimine le risque d'instabilités numériques.

L'amortissement utilisé couramment par les méthodes de relaxation dynamique est purement visqueux : la force résistante au mouvement d'un nœud est proportionnelle à sa vitesse. La mise en œuvre d'un tel schéma a trois inconvénients :

- l'amortissement introduit des forces de volume, qui sont erronées dans les régions en « écoulement », et peuvent influencer dans certains cas sur le mode de rupture ;

- la constante de viscosité optimale dépend des valeurs propres de la matrice de rigidité, qui ne peuvent être connues que par une analyse modale complète. Pour un problème linéaire, une telle analyse demande presque autant de temps que la résolution proprement dite. Pour un problème non linéaire, les valeurs propres ne sont pas forcément définies ;

- dans sa forme standard, l'amortissement visqueux est appliqué également à tous les nœuds, la même constante de viscosité est choisie pour tout le maillage. Dans de nombreux cas, les comportements peuvent dif-

férent d'une partie à l'autre du maillage, l'une étant stable alors que l'autre est en plasticité par exemple. Pour de telles situations, l'amortissement doit être adapté localement.

Pour surmonter ces difficultés, nous imposons à chaque nœud une force d'amortissement dont le module est proportionnel au module de la force nette non équilibrée, et dont la direction est telle qu'elle produit toujours un travail négatif. L'équation (13) est remplacée par l'équation suivante :

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\Sigma F_i^{(t)} - \alpha |\Sigma F_i^{(t)}| \text{signe}(\dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)}) \right) \frac{\Delta t}{m} \quad (15)$$

où α est une constante (que nous avons fixée à 0,8).

Cette forme d'amortissement possède les propriétés requises : les forces de volume s'évanouissent à l'état stationnaire ; la constante d'amortissement est sans dimension et ne dépend pas des propriétés du système, et l'amortissement est variable d'un point à l'autre (CUNDALL, 1987, pp. 134-135).

Comme nous l'avons signalé plus haut, la procédure de résolution explicite n'est pas inconditionnellement stable : la vitesse du « front de calcul » doit être plus grande que la vitesse maximum de propagation de l'information. Il faut donc choisir un pas de temps, plus petit qu'un certain pas de temps « critique ».

Pour un solide élastique discrétisé en éléments de taille Δx , la condition de stabilité est :

$$\Delta t < \Delta x / C \quad (16)$$

où C est la vitesse maximum de propagation de l'information — typiquement, la vitesse des ondes de compression, C_p , avec :

$$C_p = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}} \quad (17)$$

où : K est le module volumique
 G est le module de cisaillement

Pour une masse au bout d'un ressort, la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta t < 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (18)$$

où : m est la masse
 k est la raideur

Dans un système général, constitué d'un solide déformable et d'un réseau quelconque de masses et de ressorts connectés, le pas de temps critique est relié à plus petite période naturelle du système, $T_{\min}$:

$$\Delta t < \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (19)$$

En pratique, la détermination des périodes propres du système complet n'a pas d'intérêt pour ce problème. En effet, nous pouvons estimer facilement le pas de temps

critique local, quitte à appliquer ensuite un « coefficient de sécurité » à ce pas de temps. La résolution ne sera alors pas aussi rapide que si nous connaissions au départ le pas de temps critique exact, mais le temps perdu sera beaucoup moins long que le temps nécessaire pour calculer les périodes propres !

Nous ne cherchons à calculer que des états statiques ou quasi statiques. Les masses nodales peuvent donc être considérées, dans l'équation du mouvement (eq. 15), comme des facteurs de relaxation : nous pouvons les ajuster pour améliorer la convergence. Bien entendu, nous n'appliquons cet ajustement qu'aux masses inertielles, et ne modifions pas les masses gravitationnelles, qui sont utilisées pour calculer les forces dues à la pesanteur (eq. 12). Nous faisons l'hypothèse que la convergence sera optimale si les valeurs de tous les pas de temps critiques sont égales, c'est-à-dire si les périodes de réponse naturelles de tous les points du système sont identiques. Par convention et pour simplifier les calculs, nous fixons le pas de temps à 1 et ajustons les masses nodales pour obtenir un pas de temps critique de 2, le « coefficient de sécurité » ainsi appliqué étant de 0,5.

Sur une zone triangulaire d'aire A et de plus grande dimension $\Delta x_{\max}$. Nous estimons la distance de propagation minimum d'un nœud à l'autre de la zone à $2A/\Delta x_{\max}$. Il vient alors :

$$\Delta t = \frac{2A}{C_p \Delta x_{\max}} \quad (20)$$

Substituant dans (20) la valeur $\Delta t = 2$ et l'expression de C_p , il vient :

$$\rho = \frac{(K + 4G/3) \Delta x_{\max}^2}{A^2} \quad (21)$$

La masse nodale m_{nt} contributive par un triangle est un tiers de la masse de la zone ρA , soit :

$$m_{nt} = \frac{(K + 4G/3) \Delta x_{\max}^2}{3A} \quad (22)$$

Enfin, il reste à sommer les masses contributives par tous les triangles dont le nœud fait partie, en divisant par un facteur 2 pour tenir compte des paires de triangles superposées dans chaque quadrilatère, pour obtenir la masse nodale m_n .

$$m_n = \sum \frac{(K + 4G/3) \Delta x_{\max}^2}{6A} \quad (23)$$

L'effet de structures ou d'interfaces représentées par des systèmes de ressort est pris en compte en ajoutant à la sommation de l'équation (23) une masse équivalente calculée à l'aide de l'équation (18).

4. APPLICATION A L'ANALYSE D'UN REMBLAI RENFORCÉ

4.1. Mise en œuvre de la méthode

La méthode des éléments Lagrangiens a été mise en œuvre par Peter CUNDALL et Itasca Consulting Group dans le code FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua).

Parmi les capacités de ce programme, on peut citer : diverses lois de comportement, lois de MOHR-COULOMB et de HOEK-BROWN, loi à deux mécanismes (cisaillement et compression isotrope), matériaux radoucissant/durcissant, trois lois de fluage, etc., résolution de problèmes en déformations planes, en contraintes planes et axisymétriques, des éléments câbles (avec scellement) et des éléments poutres pour modéliser renforcements, structures, murs de soutènement, des interfaces pour représenter les joints ou les couches minces, la modélisation des écoulements, le cas échéant avec surface libre et des phénomènes couplés comme la consolidation, la modélisation thermique et thermo-mécanique. Enfin, FLAC est muni d'un macro-langage, qui permet à l'utilisateur de définir de nouvelles variables, procédures, sorties graphiques, etc.

4.2. Effet de la rigidité du renforcement sur le comportement d'un remblai

Nous avons utilisé FLAC pour modéliser la construction d'un remblai de 6 m de hauteur en matériau purement frottant ($\varphi = 36^\circ$), renforcé par huit lits d'armatures espacées verticalement de 75 cm (fig. 3). La géométrie est similaire à celle d'un mur en Terre Armée, excepté pour le parement qui est constitué de six plaques de 70 cm de longueur reliées entre elles par des joints sans résistance en flexion. Les plaques sont reliées au sol par une interface d'angle de frottement 20° , et chacune d'elles est reliée en son centre à la tête d'une armature. Les armatures sont des éléments « câbles », sans résistance en flexion, reliés au sol par une interface dont l'angle de frottement dépend de la profondeur de l'armature. Nous avons testé des armatures de trois rigidités différentes. Les moins extensibles ($E = 2.10^{11}$ Pa) reproduisent l'armature métallique classique d'un mur en Terre Armée. Les deux autres valeurs ($E = 2.10^9$ Pa et $E = 2.10^8$ Pa) correspondent à des renforcements qui pourraient être constitués les premiers de polyéthylène haute densité (PEHd) étiré, les seconds de PEHd non étiré (sans tenir compte des effets du fluage). Toutes les armatures d'un mur sont identiques. Espacées de 75 cm, elles ont une longueur de 4,20 m, une largeur de 60 mm et une épaisseur de 5 mm. L'interaction sol-armature est caractérisée par une cohésion nulle et un coefficient de frottement qui varie de 1,5 à la tête du remblai jusqu'à $\tan \varphi$ à 6 m de profondeur. Le modèle est prolongé de 12 m en arrière de l'extrémité des armatures et a donc une longueur totale de 16,2 m.

Une simulation a tout d'abord été validée par comparaison avec un code Eléments Finis (CESAR) dans un cas où l'hypothèse des petites déformations est acceptable, remblai mis en place en une seule phase, avec des armatures métalliques.

Les résultats concordent alors tout à fait en termes de tensions maximales dans les armatures comme de déplacements du massif.

Nous avons ensuite, à l'aide du macro-langage inclus dans FLAC, écrit une procédure qui permet de construire une couche de remblai de 75 cm de hauteur et d'y placer une armature et le parement correspondant. Nous avons ainsi simulé en grande déformation

Fig. 3. — Géométrie du modèle de remblai.

Fig. 3. — Geometry of the fill model.

la construction du remblai en huit phases successives, pour les trois types d'armatures définis plus haut.

Les résultats à l'issue de l'étape finale sont représentés sur les figures 4, 5 et 6. Sur ces trois figures, uniquement la partie gauche du modèle est représentée. Les barres le long des armatures et des plaques verticales figurent les tractions qui s'y exercent. Les lignes pointillées sont les courbes d'iso-déplacement horizontal.

Le déplacement horizontal maximal du parement varie de 3,5 mm pour les armatures métalliques à 4,5 cm pour les armatures extensibles, puis 45 cm pour les

armatures très extensibles. Dans ce dernier cas, le déplacement horizontal atteint 7,5 % de la hauteur du mur.

Les figures montrent clairement le changement de régime de comportement du système, d'un matériau quasi élastique dont la déformation varie régulièrement avec la profondeur et dans lequel les armatures sont sollicitées sur toute leur longueur (renforcement métallique, fig. 4), à un matériau qui rentre largement dans le domaine plastique au cours du chargement (l'état final stable étant revenu dans le domaine élastique), pour lequel un « coin de rupture » s'individualise nettement

Fig. 4. — Remblai avec renforcement métallique. Tensions dans le renforcement (maximum 24,3 kN) et déplacements horizontaux (courbes iso-déplacement d'intervalle 5.10^{-4} m).

Fig. 4. — Fill with metal reinforcement. Tension in the reinforcement (maximum 24,3 kN) and horizontal displacement iso-lines (lines interval is 5.10^{-4} m).

et un ventre de déformation apparaît au parement, alors que les armatures inférieures ne sont plus sollicitées que sur une partie de leur longueur (renforcement extensible, fig. 5). La figure 6 (renforcement très extensible) montre simplement une amplification des phénomènes observés sur la figure 5, les déformations étant approximativement multipliées par 10.

5. CONCLUSION

Les simulations exposées ci-dessus ont été effectuées sur un ordinateur compatible PC 383. Les deux premières ont requis environ 6 h 30 de calculs et la dernière environ 8 h de calculs. Les résultats montrés en figures 5 et 6 n'ont pu être obtenus que grâce à la capacité de la méthode utilisée à gérer de grandes zones en plasticité au cours des calculs et à « accompagner » les grandes déformations du massif. Par sa capacité à reproduire de manière réaliste les comportements spécifiques des géomatériaux, tout en réclamant des moyens de calcul limités (micro-ordinateurs ou stations de travail), la méthode des éléments Lagrangiens fournit un outil de choix à l'ingénieur géotechnicien,

pour le dimensionnement et la vérification des ouvrages qu'il conçoit.

REMERCIEMENTS

Les calculs présentés ici ont été effectués à la suite d'une étude réalisée pour la Société Terre Armée Internationale. Les spécifications du renforcement métallique, ainsi que les résultats de simulations par le code Eléments Finis CESAR nous ont été fournis par Monsieur P. SEGRESTIN.

BIBLIOGRAPHIE

- CUNDALL P.A. (1980), UDEC, A generalized distinct element program for modelling jointed rock, Peter Cundall Associates, Report PCAR-1-80, US Army, European Research Office, Contract DAJA37-79-C-0548, March.
- CUNDALL P.A. (1987), Distinct element models of rock and soil structure, Analytical and computational methods in engineering rock mechanics, Chap. 4, pp. 129-163. E.T. Brown, Ed. London, Georges Allen and Unwin.

Fig. 5. — Remblai avec renforcement extensible. Tensions dans le renforcement (maximum 26,2 kN) et déplacements horizontaux (courbes iso-déplacement d'intervalle $5 \cdot 10^{-3}$ m).

Fig. 5. — Fill with flexible reinforcement. Tension in the reinforcement (maximum 26,2 kN) and horizontal displacement iso-lines (lines interval is $5 \cdot 10^{-3}$ m).

Fig. 6. — Remblai avec renforcement très extensible. Tensions dans le renforcement (maximum 25,5 kN) et déplacements horizontaux (courbes iso-déplacement d'intervalle $5 \cdot 10^{-2}$ m).

Fig. 6. — Fill with very flexible reinforcement. Tension in the reinforcement (maximum 25,5 kN) and horizontal displacement iso-lines (lines interval is $5 \cdot 10^{-2}$ m).

DESAI C.S., CHRISTIAN J.T. (1977), *Numerical methods in geomechanics*, New York, McGraw-Hill.

MARTI J., CUNDALL P.A. (1982), *Mixed discretization procedure for accurate solution of plasticity problems*, Int. J. Num. Methods Eng., 6, 129-139.

MALVERN (1969), *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall.

NAGTEGAAL J.C., PARKS D.M., RICE J.R. (1974), *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range*. Comp. mech. in appl. mech. and eng., 4, 153-177.

WILKINS M.L. (1964), *Fundamental methods in hydrodynamics*, Methods in computational physics, vol. 3, pp. 221-263. Alder et al., Eds. New York, Academic Press.

ANNEXE

EXEMPLE SIMPLE DE FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS/DIFFÉRENCES FINIES

Pour illustrer le parallèle entre les formulations Éléments Finis et Différences Finies, nous prenons le problème simple d'une plaque trapézoïdale encastree en pied et soumise en tête à un effort de traction F . La formulation Éléments Finis est due à F. SCHLOSSER (communication orale) et est basée sur le Principe des Travaux Virtuels.

Pour ce problème mono-dimensionnel, nous maillons la poutre par trois trapèzes et utilisons quatre nœuds : A_0 , A_1 , A_2 et A_3 (fig. A1).

Vu le nombre réduit d'éléments, la résolution n'est bien sûr qu'approchée. Il s'agit ici d'illustrer des approches et non de calculer une poutre ! Pour des raisons de simplicité également, nous ne reprenons pas ici la discrétisation mixte utilisée dans FLAC. Le lecteur intéressé se reportera à l'article de MARTI et CUNDALL (1982) sur le sujet.

Nous nous plaçons au départ en élasticité linéaire et utilisons K (module de déformation volumique) et G (module de cisaillement).

Formulation Éléments Finis

Soit u le champ de déplacements horizontaux. Nous utilisons une interpolation linéaire entre les points et appelons u_i le déplacement du point A_i . Avec les notations de la figure A1, il vient :

$$\begin{aligned} u &= u_1 \frac{x}{l} & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ u &= u_1 \left(2 - \frac{x}{l}\right) - u_2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{si } l \leq x \leq 2l \\ u &= u_2 \left(3 - \frac{x}{l}\right) - u_3 \left(2 - \frac{x}{l}\right) & \text{si } 2l \leq x \leq 3l \end{aligned} \quad (A1)$$

Fig. A1. — Poutre trapézoïdale. Discrétisation.

Fig. A1. — Trapeze shaped beam. Discretization.

L'étude d'un élément nous permet de calculer le travail de déformation virtuelle dû à toute déformation virtuelle. Avec les notations de la figure A2, le tenseur de déformation est :

$$\varepsilon_{11} = \frac{u}{c}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$$

Le tenseur de contraintes $\bar{\sigma}$ est alors :

$$\left(K + \frac{4}{3} G \right) \begin{bmatrix} \frac{u}{c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit le tenseur de déformation virtuelle :

$$\delta \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, le travail de déformation virtuelle correspondant δW_{def} est donné par :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{def}} &= \int_s \left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{u}{c} \frac{\delta u}{c} ds \\ &= \left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{a+b}{2c} u \delta u \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le Principe des Travaux Virtuels (P.T.V.) à la plaque pour déterminer le système d'équations linéaires donnant les déplacements u_1 , u_2 et u_3 .

D'après le P.T.V., pour tout déplacement virtuel, la somme des travaux des actions extérieures est égale au travail de déformation virtuelle. Soit ici :

$$\delta W_{\text{ext}} = F \delta u_3$$

Fig. A2. — Poutre trapézoïdale.
Notations pour l'étude d'un élément.

Fig. A2. — Trapeze shaped beam. Study of one element.

$$\delta W_{\text{def}} = \frac{K + \frac{4}{3} G}{2l} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} &[(2h + 5d) u_1 \delta u_1 \\ &+ (2h + 3d) (u_2 - u_1) (\delta u_2 - \delta u_1) \\ &+ (2h + d) (u_3 - u_2) (\delta u_3 - \delta u_2)] \end{aligned}$$

En écrivant l'identité entre ces deux expressions pour toute valeur de δu_1 , δu_2 et δu_3 , il vient :

$$\begin{aligned} &(4h + 8d) u_1 \\ &- (2h + 3d) u_2 = 0 \\ &- (2h + 3d) u_1 \\ &+ (4h + 4d) u_2 \\ &- (2h + d) u_3 = 0 \\ &- (2h + d) u_2 \\ &+ (2h + d) u_3 = \frac{6Fl}{3K + 4G} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Formulation Différences Finies

L'étude d'un élément donne ici, en fonction des vitesses aux nœuds, le tenseur incrément de déformation puis le tenseur de contraintes.

En utilisant l'équation (5), il vient :

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{1}{S} \int_P \dot{u} \cdot n dp \quad (\text{A5})$$

avec P : périmètre de l'élément

n : normale au périmètre

En considérant que les vitesses varient linéairement dans l'élément, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} &= \frac{1}{S} \left(\dot{u}_2 b + \frac{\dot{u}_2}{2} (a - b) - \dot{u}_1 a \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{u}_1}{2} (a - b) \right) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} &= \frac{2}{c(a+b)} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \frac{(a+b)}{2} \\ &= \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{c} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

D'où :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{c}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad i \neq 1 \text{ ou } j \neq 1$$

Ceci permet de calculer $\dot{\sigma}$ et donc $\Delta \sigma$.

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= \left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{c} \Delta t \\ \Delta \sigma_{22} &= \Delta \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Nous en déduisons l'incrément de force appliqué sur les côtés du trapèze, à l'aide de l'équation (10) :

- Côté 1 : $\Delta F = -a\Delta\sigma_{11}$
- Côté 2 : $\Delta F = b\Delta\sigma_{11}$

Chaque côté latéral :

$$\Delta F = \frac{(a-b)}{2} \Delta\sigma_{11}$$

En répartissant de manière égale entre les deux nœuds les forces sur les côtés latéraux, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= -\frac{(a+b)}{2} \Delta\sigma_{11} \\ &= -\frac{(a+b)}{2} \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{c} \Delta t \\ \Delta F_2 &= +\frac{(a+b)}{2} \Delta\sigma_{11} \\ &= +\frac{(a+b)}{2} \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{c} \Delta t \end{aligned} \quad (A9)$$

Il reste à sommer les forces incrémentales appliquées à chaque nœud :

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \left(K + \frac{4}{3}G\right) \dot{u}_1 \frac{(2h+5d)}{2l} \Delta t \\ &\quad - \left(K + \frac{4}{3}G\right) (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \frac{(2h+3d)}{2l} \Delta t \\ \Delta F_2 &= \left(K + \frac{4}{3}G\right) (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \frac{(2h+3d)}{2l} \Delta t \\ &\quad - \left(K + \frac{4}{3}G\right) (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \frac{(2h+d)}{2l} \Delta t \\ \Delta F_3 &= \left(K + \frac{4}{3}G\right) (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \frac{(2h+d)}{2l} \Delta t \end{aligned} \quad (A10)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{2l\Delta F_1}{\left(K + \frac{4}{3}G\right) \Delta t} &= + (4h + 8d) \dot{u}_1 \\ &\quad - (2h + 3d) \dot{u}_2 \\ \frac{2l\Delta F_2}{\left(K + \frac{4}{3}G\right) \Delta t} &= - (2h + 3d) \dot{u}_1 \\ &\quad + (4h + 4d) \dot{u}_2 \\ &\quad - (2h + d) \dot{u}_3 \\ \frac{2l\Delta F_3}{\left(K + \frac{4}{3}G\right) \Delta t} &= - (2h + d) \dot{u}_2 \\ &\quad + (2h + d) \dot{u}_3 \end{aligned} \quad (A11)$$

On se ramène aisément à une équivalence avec le système (A4) à cause de la linéarité du problème. L'équilibre peut être atteint en un seul pas de temps à partir de l'état initial ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$), pourvu que, lors de ce pas de temps, on ait :

$$\Delta F_1 = \Delta F_2 = 0 \text{ et } \Delta F_3 = -F$$

En fait, nous ne procédons pas ainsi. A l'instant initial, les vitesses $\dot{u}_i$ étant nulles, nous aurons $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 = 0$, soit une force non équilibrée égale à F au point A_3 . Ceci va provoquer une variation de la vitesse $\dot{u}_3$ au cours du premier pas de temps, puis de proche en proche l'extension de la plaque.

De cette façon, au lieu de calculer directement un état final, nous reproduisons la mise en tension progressive de la plaque.

Bien entendu, cette méthode est très inefficace dans le cas élastique linéaire traité ci-dessus. Supposons maintenant que la force F est telle que la barre s'allonge de 50 % à l'équilibre. La résolution est identique. C'est la réactualisation des coordonnées des nœuds à chaque pas qui va permettre de reproduire l'allongement. De plus, parce qu'elle suit le phénomène physique de mise en tension de la plaque et reproduit donc en détail le chemin de contraintes suivi, cette méthode est extrêmement robuste vis-à-vis de changements éventuels de comportement du matériau au cours de son chargement.