

# Dilatance-Contractance des milieux pulvérulents : déformation d'un milieu analogique

**P. SIRIEYS**

*Institut  
Dolomieu  
15, rue Maurice-Gignoux  
38031  
Grenoble Cedex*

## Résumé

La variation de volume qui intervient dans la déformation d'un milieu pulvérulent (dilatance-contractance) est analysée à l'aide d'un milieu analogique constitué d'un assemblage régulier de cylindres de même diamètre. Les champs de vitesse de déformation et de déformation finie sont analysés dans les cas de déformation pure et rotationnelle. Les relations entre ces déformations et les champs de contraintes associés sont abordées.

---

# Dilatancy-Contractancy of granular mediums : strain of a analogical medium

## Abstract

The volume change which happens in the strain of a granular medium (dilatancy-contractancy) is analysed with the help of an analogical medium made of a regular structure of iso-diametric cylinders. The strain-rate and finite strain fields are analysed in the cases of pure and rotational strain. Some relations between these strains and the linked stress fields are suggested.

## Introduction

La déformation des milieux pulvérulents (sables, poudres) est caractérisée par les phénomènes de dilatance et de contractance. La déformation d'un sable s'effectue, dans un état compact, avec augmentation de volume, dans un état lâche, avec diminution de volume. Ces mécanismes, mis en évidence expérimentalement, peuvent être abordés par l'analyse de la déformation d'un milieu analogique (constitué par un assemblage régulier de cylindres de même diamètre) et de ses relations avec le champ de contraintes associé. Ce type de milieu analogique a fait l'objet de nombreux travaux, théoriques et expérimentaux, notamment par P. Dantu<sup>(1)</sup> et J. Weber<sup>(3)</sup> qui utilisaient des cylindres de verre (permettant l'examen en lumière polarisée). Un mélange de cylindres de plusieurs diamètres leur a permis la réalisation d'un milieu statistiquement homogène et isotrope, des cylindres égaux, en assemblage régulier, ont également été utilisés par P. Dantu<sup>(1a)</sup>.

## Structure

La structure étudiée est constituée d'un assemblage de cylindres de même rayon, non pesants (ou pesants avec les axes des cylindres verticaux) à surface lisse (frottement nul des cylindres entre eux). L'arrangement est de type régulier, donc caractérisé à l'aide d'un seul paramètre ( $2\alpha$ ).

Le milieu réel peut être considéré comme un milieu discret, constitué par les centres des cercles (en section) qui doivent rester (au cours de la déformation) à distance constante  $d$  (égale au diamètre des cercles). Ces points sont situés sur deux familles de droites  $a$  et  $b$  formant un réseau à base losange (de côté  $d$ , d'angle  $2\alpha$ ) tel qu'à chaque nœud du réseau est situé un centre de cercle (Fig. 1). La constance de  $d$  limite  $\alpha$  aux valeurs  $\pi/6$  et  $\pi/3$  ( $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ ).

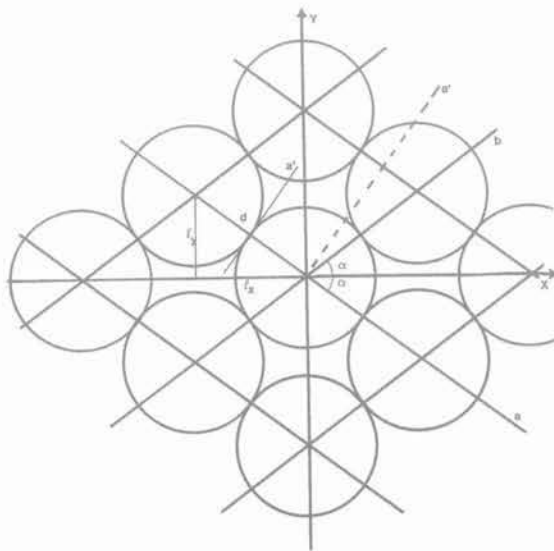


FIG. 1 Structure de l'assemblage.  
The structure of the assemblage.

Le milieu réel peut être assimilé à un milieu continu (le milieu continu équivalent, souvent utilisé, notamment en Mécanique des sols) tel que les lignes de nœuds (familles  $a$  et  $b$ ) sont des directions inextensibles.

## Déformation du milieu

La déformation du milieu est analysée sous l'hypothèse de cylindres rigides (est donc négligée la déformation des cylindres devant celle de l'assemblage) et, bien sûr, de la constance de  $d$  (distance de deux nœuds). La cinématique peut donc être abordée soit par l'étude du milieu discrétisé (nœuds du réseau losangique, déformation de certains dessous-de-plat), soit par l'étude du milieu continu équivalent.

### Déformation pure

Les diagonales du losange (maille élémentaire) restent fixes. Elles sont prises pour axes  $xy$ .

#### Déformation infinitésimale

Dans  $xy$  l'assemblage est caractérisé par l'angle  $\alpha = (a, x) = (x, b)$  avec (Fig. 2) :

$$\begin{cases} l_x = d \cos \alpha \\ l_y = d \sin \alpha \end{cases}$$

Une petite variation  $d\alpha$  entraîne une déformation infinitésimale :

$$\begin{cases} dl_x = dl_x / l_x = \tan \alpha d\alpha \\ dl_y = dl_y / l_y = \cot \alpha d\alpha \end{cases} \quad (1a)$$

soit, en termes de vitesse de déformation, bien que le temps ne soit pas une variable essentielle :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = -\tan \alpha \dot{\alpha} \\ \dot{\epsilon}_y = \cot \alpha \dot{\alpha} \end{cases} \quad (1b)$$

La vitesse de déformation pure ( $\mathcal{D}$ ) du milieu est donc définie dans  $(xy)$  par :

$$(\mathcal{D})_{xy} = \begin{pmatrix} -\tan \alpha \dot{\alpha} & 0 \\ 0 & \cot \alpha \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

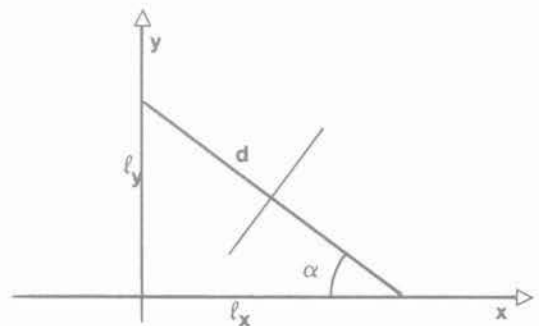


FIG. 2 Déformation de la maille élémentaire.  
The strain of the elementary cell.

## Déformation pure finie\*

Les vitesses de déformation principales sont notées  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$ , avec  $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2$ , les directions principales de  $(\mathcal{D})$ , notées X et Y (X majeure, Y mineure) coïncident avec x ou y.

Sous l'hypothèse des extensions positives :

- pour  $\alpha > 0$ , X coïncide avec y,  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_y$ ;
- pour  $\alpha < 0$ , X est porté par x,  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_x$ .

Dans tous les cas  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$  sont de signe opposé, avec :

$$\dot{\epsilon}_1 \cdot \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\alpha}^2 \quad (2a)$$

En outre, le rapport  $-\dot{\epsilon}_x / \dot{\epsilon}_y$  (appelé par analogie avec l'Élasticité « coefficient de Poisson instantané ») égal à :

$$-\dot{\epsilon}_x / \dot{\epsilon}_y = \tan^2 \alpha \quad (2b)$$

varie de 1/3 à 3 pour  $\alpha$  variant entre  $\pi/6$  et  $\pi/3$  et prend la valeur 1 pour  $\alpha = \pi/4$ .

## • Décomposition

$(\mathcal{D})$  se décompose en partie isotrope  $(\mathcal{D})_i$ , vitesse de variation de surface, donc de volume, et une partie déviatoire  $(\mathcal{D})_d$ , vitesse de déviation, ou de variation de forme à volume constant :

$$(\mathcal{D}) = (\mathcal{D})_i + (\mathcal{D})_d$$

En notant :  $2\dot{\rho} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = dS/Sdt$  quantité appelée vitesse de dilatance, si  $> 0$ , de contractance, si  $< 0$ , la partie isotrope s'écrit :

$$(\mathcal{D})_i = \dot{\rho}(I) = \cot 2\alpha \cdot \dot{\alpha}(I) \quad (3a)$$

$(\mathcal{D})$  est isovolume pour  $\alpha = \pi/4$ .

La partie déviatoire est caractérisée par l'invariant :

$$2\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = 2|\dot{\alpha}| / \sin 2\alpha \quad (3b)$$

(appelé parfois vitesse de déviation).

Finalement :

$$(\mathcal{D})_{xy} = \cot 2\alpha \cdot \dot{\alpha}(I) + \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}/\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}/\sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

En outre :

$$\dot{\rho} = \dot{\epsilon} \cos 2\alpha \quad (3c)$$

$(\mathcal{D})$  est représentée dans le plan de Mohr (Fig. 3).

La dilatance-contractance peut être caractérisée par  $(\mathcal{D})/\dot{\alpha}$  (dont les invariants sont  $2 \cot 2\alpha$  et  $-1$ ) ne dépendant que de  $\alpha$ . Elle est représentée dans le plan de Mohr (Fig. 4) pour trois valeurs de  $\alpha$  :  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  et  $\pi/3$ .

*Remarque :*  $(\mathcal{D})$  peut être analysée directement, dans le continu équivalent, à l'aide des relations usuelles relatives à la géométrie de  $(\mathcal{D})$  concernant les vitesses d'extension ( $\dot{\epsilon}_\theta$ ) et de rotation ( $\dot{\theta}$ ) dans une direction n telle que  $\theta = (x, n)$ , soit, pour  $x = X$  ( $\dot{\alpha} < 0$ ), avec les notations  $\dot{\rho}$  et  $\dot{\epsilon}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{\rho} + \dot{\epsilon} \cos 2\theta \\ \dot{\theta} &= -\dot{\epsilon} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Dans le mécanisme envisagé, les directions  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont des directions inextensibles, ces relations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \dot{\epsilon} \cos 2\alpha &= 0 \\ \dot{\alpha} &= -\dot{\epsilon} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

et redonnent bien les relations (3).

Les équations du champ de vitesse de déplacement, qui s'expriment dans (xy) par :

$$\begin{cases} v_x = -\tan \alpha \dot{\alpha} x \\ v_y = \cot \alpha \dot{\alpha} y \end{cases}$$

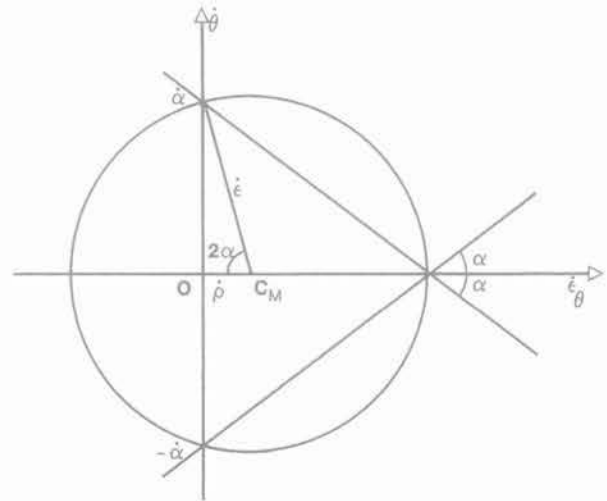


FIG. 3 Vitesse de déformation pure (représentation par le cercle de Mohr). Pure Strain rate (representation by the Mohr circle).

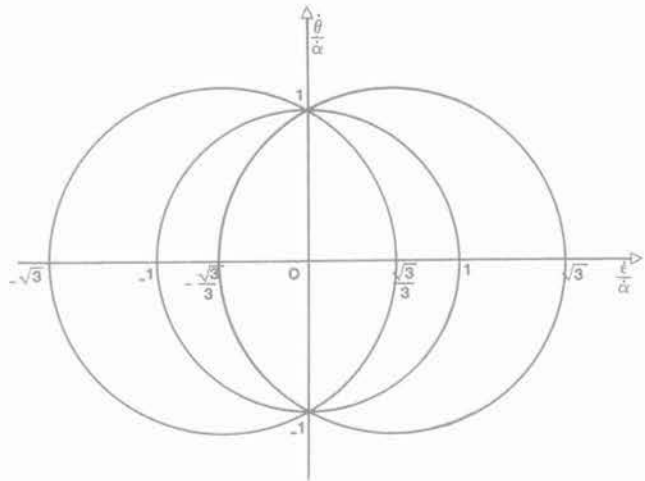


FIG. 4 Dilatance-Contractance (représentation par des cercles de Mohr de  $(\mathcal{D})/\dot{\alpha}$  pour  $\alpha = 30, 45$  et  $60^\circ$ ). Dilatancy and Contractancy (representation by the Mohr circles for  $(\mathcal{D})/\dot{\alpha}$  for  $\alpha = 30, 45$  and  $60^\circ$ ).

\* Une déformation étant définie comme gradient des déplacements (D), qui résulte de la décomposition polaire de la matrice gradient des coordonnées, est alors nommée « Extension droite ». Néanmoins le terme « déformation pure » est utilisé ici « pour des raisons bien évidentes », selon P. Germain [2] (p. 97), en accord avec le vocabulaire usuel (notamment pour éviter de caractériser une contraction par « extension négative »).

conduisent, par intégration, entre un état initial caractérisé par  $(\alpha_0, x_0, y_0)$  et un état actuel  $(\alpha, x, y)$  aux relations :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \alpha / \cos \alpha_0 \\ y = y_0 \cos \alpha / \cos \alpha_0 \end{cases}$$

La déformation finie, entre  $\alpha_0$  et  $\alpha$  s'exprime donc, dans  $(xy)$  par :

$$(D)_{xy} = \begin{pmatrix} \cos \alpha / \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha / \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

D a donc pour directions principales  $xy$  et pour scalaires principaux :  $\lambda_x = \cos \alpha / \cos \alpha_0$  et  $\lambda_y = \sin \alpha / \sin \alpha_0$ . La variation d'aire est égale à :

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_0} \quad (5)$$

La déformation est donc isoaire si :  $\alpha = \pi/2 - \alpha_0$ .

Exemple : quatre séquences de la déformation D (avec  $\alpha_0 = \pi/6 = 30^\circ$  et, pour  $\alpha$ , un pas de  $\pi/24$ ).

Séquence	$\alpha$	$\alpha$ (degrès)	$\lambda_x$ $\lambda_y$	$S/S_0$	$\epsilon_x$ (%) $\epsilon_y$ (%)
D <sub>1</sub>	$5\pi/24$	37°5	0,916 1,217	1,115	-8,48 21,7
D <sub>2</sub>	$\pi/4$	45°	0,816 1,414	1,154	-18,4 41,4
D <sub>3</sub>	$7\pi/24$	52°5	0,702 1,586	1,115	-29,8 58,6
D <sub>4</sub>	$\pi/3$	60°	0,577 1,732	1	-42,2 73,2

La déformation D<sub>4</sub> est isoaire, alors qu'à chaque instant  $\mathcal{D}$  est anisoaire : la succession de dilatance et de contractance conduit à une variation globale de surface nulle.

#### • Porosité et indice des vides

La variation de volume a été exprimée par rapport au volume total par la relation (5). La porosité  $n$  est égale à :

$$n = 1 - \pi/4 \sin 2\alpha \quad (6a)$$

Elle peut également s'exprimer par rapport au volume interstitiel (c'est alors l'évolution du volume interstitiel qui est analysée, le volume du squelette restant constant).

Le volume des vides, pour une épaisseur unité, est égal à :

$$S_v = d^2 (\sin 2\alpha - \pi/4)$$

donc :

$$\frac{S_v}{S_{v_0}} = \frac{4\sin 2\alpha - \pi}{4\sin 2\alpha_0 - \pi} \quad (6b)$$

L'indice des vides est égal à :

$$e = (4 \sin 2\alpha) / \pi - 1 \quad (6c)$$

$e$  varie de 10,26 % à 27,32 % (Fig. 5).

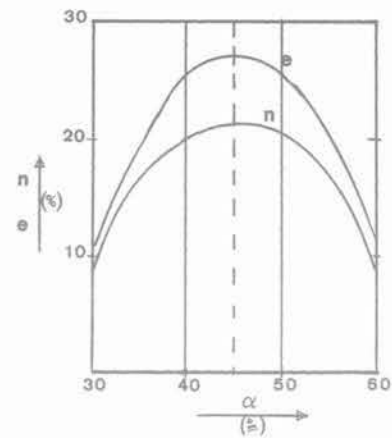


FIG. 5 Variation de porosité (n) et d'indice des vides (e).

Variation of porosity (n) and void index (e).

### 3.2

## Déformation rotationnelle

En déformation pure (cas précédent), les directions  $xy$  restent fixes (directions invariantes). Lorsqu'une direction (distincte de  $x$  ou  $y$ ) est maintenue invariante, une variation de  $\alpha$  conduit à une vitesse de déformation rotationnelle ( $\mathcal{R}$ ) qui se décompose en une somme de vitesse de déformation pure ( $\mathcal{D}$ ) et de rotation ( $\mathcal{R}$ ), soit :

$$(\mathcal{F}) = (\mathcal{D}) + (\mathcal{R})$$

Cas de la direction a (ou b) du réseau invariante.

Une vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  maintient la direction a invariante si :

$$\dot{\theta} = (-1/\sin 2\alpha) \dot{\alpha} \sin 2\alpha = -\dot{\alpha}$$

Dans  $(xy)$ , ( $\mathcal{F}$ ) s'exprime alors par :

$$(\mathcal{F})_{xy} = \begin{pmatrix} -\tan \alpha \dot{\alpha} & -\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} & \cot \alpha \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Dans les axes  $(aa')$ , (a invariante et a' sa normale), ( $\mathcal{F}$ ) a pour expression (obtenue par transmutation) :

$$(\mathcal{F})_{aa'} = \begin{pmatrix} 0 & -2\dot{\alpha} \\ 0 & 2 \cot 2\alpha \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

( $\mathcal{F}$ ) peut être considérée comme la somme d'une vitesse de glissement simple ( $\mathcal{S}$ ) isoaire :

$$(\mathcal{S})_{aa'} = \begin{pmatrix} 0 & -2\dot{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'une vitesse d'extension (ou de contraction) monoaxiale ( $\mathcal{D}$ ) anisoaire, de directions principales  $(aa')$  :

$$(\mathcal{D})_{aa'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \cot 2\alpha \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

La déformation rotationnelle finie s'obtient par intégration du champ de vitesse, soit (dans les axes  $aa'$ ,  $x_1, y_1$  étant les coordonnées dans ces axes) :

$$\begin{cases} dx_1 / dt = -2 (d\alpha/dt) y_1 \\ dy_1 / dt = 2 \cot 2\alpha (d\alpha/dt) y_1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + y_0 (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0) / \sin 2\alpha_0 \\ y_1 = y_0 (\sin 2\alpha) / \sin 2\alpha_0 \end{cases}$$

La déformation, entre  $\alpha_0$  et  $\alpha$ , s'exprime par la matrice (non-symétrique) :

$$(T)_{ax} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0} \\ 0 & \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_0} \end{pmatrix}$$

La variation de surface est, bien sûr, égale à :

$$S/S_0 = \det(T) = \sin 2\alpha / \sin 2\alpha_0$$

#### • Cas particulier

Pour  $\alpha = \pi/2 - \alpha_0$ , T est un glissement simple noté G (isoaire, alors que son chemin est anisoaire) qui a pour expression :

$$(G)_{aa} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \cot 2\alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

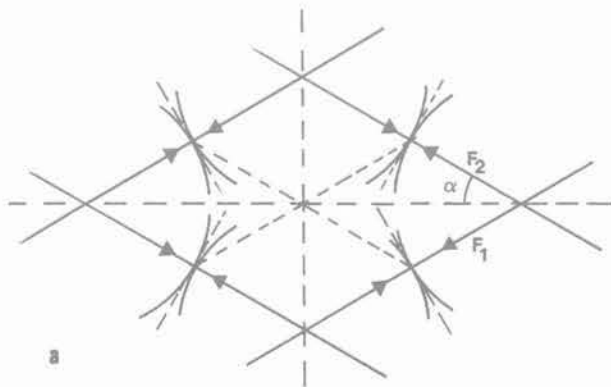
Le taux de glissement  $\gamma$  est donc égal à :  $\gamma = -2 \cot 2\alpha_0$ . Par exemple, pour  $\alpha_0 = \pi/6$ ,  $\gamma = 2 / \sqrt{3} = 1,15$ .

Finalement de grandes déformations homogènes sont obtenues (avec des périodes de  $\pi/3$  pour  $\alpha$ ) par superposition de glissements simples de taux  $2/\sqrt{3}$ . Mais la déformation peut se localiser sur une ou plusieurs couches parallèles à a pour former une bande de glissement dans laquelle s'effectue le glissement simple G.

4

## Équilibre

L'équilibre est assuré si les forces qui s'exercent aux points de contact sont des efforts de compression normaux aux surfaces de contact (cylindres sans frottement). Ces forces  $F_2$  et  $F_1$  sont donc orientées dans les directions a et b (Fig. 6a). Dans le milieu continu équivalent, ces efforts, uniformément répartis sur les arêtes



d'un losange caractérisant la maille du réseau (arête d, angle aigu  $2\alpha$ ) sont équivalentes à une répartition de contraintes uniformes compressives  $S_a = F_1/d$  et  $S_b = F_2/d$  sur une épaisseur unité (Fig. 6b). La contrainte sur a ( $S_a = F_1/d$ ) est orientée suivant b, la contrainte sur b ( $S_b = F_2/d$ ) est orientée suivant a. Les directions a et b sont donc des directions conjuguées pour l'état de contrainte ( $\Sigma$ ) puisque la contrainte qui s'exerce sur l'une (de ces coupes) est parallèle à l'autre.

Dans (xy), ( $\Sigma$ ) ayant pour composantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , la propriété de conjugaison conduit aux composantes de  $S_a$  et  $S_b$  :

$$\begin{pmatrix} S_a \cos \alpha \\ S_a \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \\ \tau_{xy} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} S_b \cos \alpha \\ -S_b \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha \\ \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

elle s'exprime par une relation indépendante de  $S_a$  et  $S_b$  :

$$\sigma_y / \sigma_x = \tan^2 \alpha \quad (7)$$

Dans le cas général où ( $\Sigma$ ) n'est pas coaxial à (xy), en notant  $\varphi = (x, X_0)$  où  $X_0$  est la direction principale majeure et  $2p = \sigma_1 + \sigma_2$ ,  $2q = \sigma_1 - \sigma_2$  ( $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant les contraintes principales majeure et mineure avec  $\sigma_1 > \sigma_2$ ) la relation de conjugaison s'exprime par :

$$p \cos 2\alpha = q \cos 2\varphi \quad (8a)$$

ou par :

$$\sigma_2 / \sigma_1 = \tan(\alpha - \varphi) \cdot \tan(\alpha + \varphi) \quad (8b)$$

Le caractère compressif des efforts conduit à :  $\varphi < \alpha$ . Inversement les conditions aux limites sur le losange-maille du réseau étant données ( $S_a$  et  $S_b$ ), l'équilibre conduit à :

$$\begin{aligned} 2\sigma_x &= (S_a + S_b) \cot \alpha \\ 2\sigma_y &= (S_a + S_b) \tan \alpha \\ 2\tau_{xy} &= S_a - S_b \end{aligned} \quad (9)$$

L'orientation de ( $\Sigma$ ) est donnée par :

$$\tan 2\varphi = \frac{S_a - S_b}{S_a + S_b} \tan 2\alpha \quad (10)$$

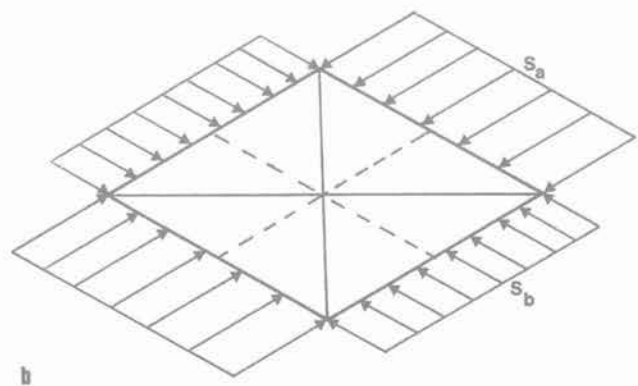


FIG. 6 Statique :  
6a - Équilibre des forces de contact.  
6b - Équilibre d'un losange dans le continu équivalent.  
Statics :  
6a - Equilibrium of contact forces.  
6b - Equilibrium of a lozenge in the fictive continuum.

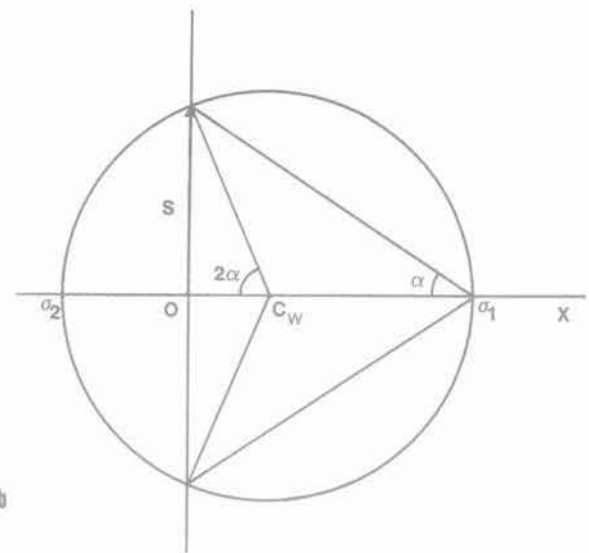
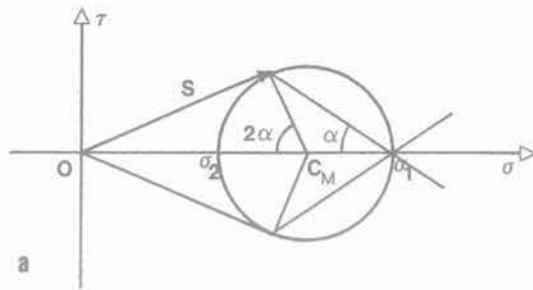


FIG. 7 État de contraintes (représentation par un cercle) :  
 7a - Cercle de Mohr.  
 7b - Cercle de Weyrauch.  
 Stress state (representation by a circle) :  
 7a - Mohr circle.  
 7b - Weyrauch circle.

Bien sûr pour  $\alpha = \pi/4$ , a et b sont directions principales.

Les invariants de  $(\Sigma)$  sont :  $\sigma_1 + \sigma_2 = (S_a + S_b) / \sin 2\alpha$  et  $\sigma_1 \sigma_2 = S_a S_b$ . Les contraintes principales ont pour valeurs :

$$\sigma_{1,2} = \frac{(S_a + S_b) \pm (S_a^2 + S_b^2 + 2S_a S_b \cos 4\alpha)^{1/2}}{2 \sin 2\alpha} \quad (11)$$

Le cas où  $(\Sigma)$  est coaxial à la structure ( $\alpha = 0$ ) entraîne une simplification :  $S_a = S_b = S$ .

D'où :  $p \cos 2\alpha = q$  et :  $\begin{cases} \sigma_x = S \cot \alpha \\ \sigma_y = S \tan \alpha \end{cases}$

Pour  $\alpha < \pi/4$ ,  $(X_\sigma, Y_\sigma) = (xy)$  et  $\sigma_y/\sigma_x = \sigma_2/\sigma_1 = \tan^2 \alpha$  ;  
 pour  $\alpha > \pi/4$ ,  $(X_\sigma, Y_\sigma) = (yx)$  et  $\sigma_x/\sigma_y = \sigma_2/\sigma_1 = \cot^2 \alpha$ .

Dans tous les cas, l'inclinaison  $i$  de la contrainte S sur les coupes a et b est maximale :  $i = \pi/2 - 2\alpha$ . Ces résultats s'obtiennent graphiquement sur les diagrammes de cercles de Mohr ou de Weyrauch (Fig. 7).

Le passage d'un état d'équilibre  $(\Sigma_0)$  à un autre  $(\Sigma)$  entraîne une déformation du milieu analogique. Le comportement du milieu (caractérisé par les relations entre les variations des contraintes et les déformations qui en résultent) dépend du chemin suivi par l'état des contraintes : rotation des axes principaux  $(X_\sigma, Y_\sigma)$  et variations des contraintes principales  $(\sigma_1$  et  $\sigma_2)$ .

Le cas où  $(\Sigma)$  reste coaxial à la structure  $(X_\sigma, Y_\sigma$  coïncidant avec  $xy)$  avec des contraintes principales croissant dans un rapport constant (cas appelé « chemin proportionnel »), entraîne une déformation pure coaxiale :  $\mathcal{L}$ , D et  $\Sigma$  sont coaxiaux à la structure  $(xy)$ . En

outre, si ce rapport est égal à  $\tan^2 \alpha_0$ , la déformation est nulle.

A titre d'exemple : le cas monoaxial est un cas particulier de coaxialité pour lequel  $\sigma_2$  est constant et  $\sigma_1$  variable. La déformation finie est caractérisée par son expression en termes de déformation linéaire, à partir des relations (4) :

$$\epsilon_x = \cos \alpha / \cos \alpha_0 - 1$$

et

$$\epsilon_y = \sin \alpha / \sin \alpha_0 - 1$$

Les contraintes sont égales à :

$$\sigma_2 = (\sigma_2)_0$$

et

$$\sigma_1 = (\sigma_2)_0 \tan^2 \alpha = (\sigma_1)_0 \tan^2 \alpha / \tan^2 \alpha_0$$

Ces relations conduisent (par élimination de  $\alpha$ ) aux relations entre  $\sigma_1$  et  $\epsilon_1$  et/ou  $\epsilon_2$  et aux courbes usuelles efforts-déformations qui caractérisent le comportement du milieu.

## 5

## Conclusion

Le milieu analogique envisagé permet donc de quantifier les mécanismes de dilatance-contractance qui caractérisent sa déformation. Les champs de vitesse de déformation et de déformation finie sont aisément déterminés. Une constante rhéologique, le coefficient de Poisson instantané, a été exprimée. En outre, les champs de contraintes en équilibre ont été établis. Ils permettent l'étude du comportement de ce milieu anisotrope particulier.

## Bibliographie

[1a] Dantu P. - Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents, C.R. 4<sup>e</sup> Cong. Intern. Mécanique des Soils et Travaux de Fondation, Londres, 1957, pp. 144-148.

milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles, *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 4, 1967.

[2] Germain P. - Cours de Mécanique des milieux continus, T. 1, Théorie générale, Masson et Cie, 1972.

[3] Weber J. - Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Application à la rhéologie de ces milieux, *Cahier du Groupe Français de Rhéologie*, n° 3, T. 1, nov. 1966.