Analyse par la théorie du calcul à la rupture de la réduction de capacité portante d'une fondation due à la proximité d'une pente

P. DE BUHAN

D. GARNIER

CERCSO-LMS
(URA 317 CNRS)

ENPC Central 2,
La Courtine
93167 Noisy-le-Grand
Cedex

Résumé

La contribution de cet article concerne l'évaluation des conditions de stabilité d'une fondation superficielle de type semelle filante reposant sur un massif de sol délimité par un talus ou une pente. L'analyse est conduite dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture, en conditions de « déformations planes ». Ayant spécifié les paramètres de chargement qui gouvernent un tel problème, l'approche cinématique par l'extérieur est mise en œuvre en considérant principalement deux classes de mécanismes (dits de « poinçonnement » et d'« instabilité ») dont on montre la pertinence par comparaison avec un calcul élastoplastique. Il est alors possible de quantifier par exemple l'effet de réduction de la capacité portante due à la proximité d'un talus ou d'une excavation, y compris dans l'hypothèse où un défaut de résistance en traction du sol constitutif doit être pris en compte.

Analysis of the bearing capacity reduction of a foundation near a slope, by means of the yield design theory

Abstract

This paper deals with the stability analysis of a strip surface footing resting on top of a slope or an excavation. The study is conducted within the framework of the yield design theory, where « plane strain » conditions are adopted. After having specified the load parameters which are involved in such a problem, the kinematic approach from outside is implemented, making mainly use of two kinds of failure mechanisms (respectively named « punching » and « instability » mechanisms), which prove to be relevant to this problem, as shown by a comparison with elastoplastic calculations. The computational tool thus developed on the basis of this method, makes it possible, for instance, to provide a quantitative assessment of the bearing capacity reduction of the foundation due to the vicinity of the excavation, including the case when reduced tensile strength properties of the soil are to be taken into account.

Introduction

Si la capacité portante d'une fondation superficielle de type semelle filante reposant sur un massif de sol horizontal semi-infini et soumis à un chargement vertical centré, est aujourd'hui un problème bien résolu ayant donné lieu à de très nombreux travaux théoriques s'appuyant sur de multiples données expérimentales, il n'en est plus de même dès que l'on s'écarte de cette situation de référence. Tel est notamment le cas lorsque cette fondation est située au voisinage d'une pente ou d'une excavation susceptible de diminuer sa portance dans des proportions importantes. Cette question a fait l'objet d'investigations expérimentales, qu'il s'agisse d'essais en vraie grandeur (Shields *et al.*, 1977; Bauer *et al.*, 1981) ou sur modèles réduits centrifugés (Gemperline, 1984; Garnier et Shields, 1989) ou non (Giroud et Tran-Vo-Nhiem, 1971; Dembicki et Zadroga, 1974). On trouvera dans le travail expérimental de thèse de N. Bakir (1993), qui a lui-même procédé à une étude expérimentale très complète dont les résultats ont été intégrés dans les règles de dimensionnement françaises (« Fascicule 62, titre V du CCTG »), une abondante bibliographie sur ce sujet.

Sur le plan des méthodes de calcul théoriques traitant explicitement de ce problème, on peut citer les travaux de Giroud et Tran-Vo-Nhiem (1971) ou Salençon (1974), fondés sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques, ainsi que plus récemment ceux de Kusakabe *et al.* (1981) puis Narita et Yamaguchi (1990) qui se rattachent à une approche de type calcul à la rupture par l'exploration de schémas de ruine représentatifs. C'est cette dernière approche que nous nous proposons ici de développer en la systématisant.

Du point de vue des méthodes pratiques de dimensionnement auxquelles les ingénieurs géotechniciens ont coutume de se référer, la question peut être abordée sous deux angles sensiblement différents : soit comme un problème de réduction de capacité portante de la fondation appréhendée par le biais de facteurs correctifs, soit comme un problème de stabilité de pente avec prise en compte d'une surcharge en tête ; le risque étant alors d'aboutir à des règles de dimensionnement différentes, voire divergentes, selon le point de vue retenu. La théorie du calcul à la rupture va au contraire nous permettre, notamment à travers la notion de paramètres de chargement d'un système, de restituer le caractère unitaire de la problématique et la cohérence de la démarche de résolution proposée.

Après donc avoir précisé les paramètres géométriques et mécaniques qui entrent en jeu dans la définition du problème, et tout particulièrement clarifié le mode de chargement de la fondation, l'analyse est conduite à l'aide de l'approche cinématique du calcul à la rupture mettant en œuvre plusieurs classes de mécanismes, dont la confrontation avec des calculs élastoplastiques montre la pertinence. L'outil de calcul ainsi mis au point est utilisé pour examiner plusieurs situations : stabilité d'une excavation creusée au pied d'un bâtiment, réduction de portance d'une fondation à proximité d'une pente, influence d'un défaut de résistance en traction du sol constitutif.

Présentation du problème. Mode de chargement

Nous considérerons dans cette étude, une semelle filante dans la direction x_3 (Fig. 1) de largeur B , située à une distance D de la crête d'un talus ou d'une excavation. Ce talus (respectivement excavation) est défini par sa hauteur (respectivement profondeur) H ; sa pente β est comprise entre 0° (nous sommes alors ramenés à l'étude du massif semi-infini) et 90° (cas du talus vertical).

FIG. 1 Définition du problème.
Statement of the problem.

Nous examinerons ici un massif constitué d'un matériau homogène, qui selon les cas, obéira à un critère de résistance de Tresca ou de Coulomb.

Il convient tout d'abord pour définir le mode de chargement du système, de préciser la cinématique de la semelle. Celle-ci est astreinte à se déplacer parallèlement au plan Ox_1x_2 (cf. Fig. 2-a) selon un mouvement de corps rigide caractérisé par ses éléments de réduction au point O, situé sur l'axe médian de la semelle en contact avec le massif de sol, de poids spécifique γ .

- translation de vitesse $\underline{U} = U_n \underline{e}_1 + U_t \underline{e}_2$
- rotation de vitesse $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3$

L'expression générale de la puissance des efforts extérieurs dans un champ de vitesse (virtuel) $\underline{U}$ cinématiquement admissible s'écrit alors :

$$P_e(\underline{U}) = \int_{\Omega} \gamma \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} dS \quad (2)$$

où Ω désigne le massif de sol, $\partial\Omega$ son bord extérieur et $\underline{T}$ représente le vecteur contrainte agissant en tout point de $\partial\Omega$. Soit, compte tenu des conditions aux limites en contrainte ($\underline{T} = 0$ à l'extérieur de la zone où est appliquée la semelle) :

$$P_e(\underline{U}) = \int_{\Omega} \gamma \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \left(\int_{-B/2}^{B/2} \underline{T} \cdot \underline{U} dx_2 \right) \quad (3)$$

Le contact semelle/massif étant supposé à adhérence parfaite (ce qu'il est possible de réaliser expérimentalement (Bakir, 1993)) la vitesse d'un point du massif en contact avec la semelle s'écrit, compte tenu de (1) :

$$\underline{U} = U_n \underline{e}_1 + U_t \underline{e}_2 - \omega x_2 \underline{e}_1, |x_2| \leq B/2$$

D'où en reportant cette dernière expression dans (3) :

$$P_e(\underline{U}) = \gamma \left(\int_{\Omega} U_1 d\Omega \right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-B/2}^{B/2} T_1 dx_2 \right) U_n + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-B/2}^{B/2} T_2 dx_2 \right) U_t + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-B/2}^{B/2} (-x_2 T_1) dx_2 \right) \omega \quad (4)$$

avec $T_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_1) = -\sigma_{11}$

$T_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_1) = -\sigma_{21}$

$U_1 = U_n - \omega x_2$

FIG. 2-a Cinématique de la semelle.
Kinematics of the footing.

FIG. 2-b Torseur des efforts appliqués par la semelle sur le massif (cas général).
Resultant forces and moment applied by the footing to the soil mass (general case).

FIG. 2-c Cas d'un chargement par liaison « rotulée ».
Loading by means of a « hinged » joint.

Compte tenu de l'invariance de la géométrie et des conditions aux limites du problème selon Ox_3 , ainsi que de l'homogénéité et de l'isotropie du sol constitutif, le problème peut être traité comme un problème de calcul à la rupture « en déformation plane » parallèlement au plan Ox_1x_2 (Salençon, 1983) et l'expression de la puissance des efforts extérieurs dans un champ de vitesse « en déformation plane » (c'est-à-dire de la forme $\underline{U} = U_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + U_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$) devient en raisonnant désormais par unité de longueur selon Ox_3 :

$$P_e(\underline{U}) = \gamma \langle \underline{U}_1 \rangle + N U_n + T U_t + M \omega \quad (5)$$

$$\text{avec } \langle \underline{U}_1 \rangle = \int_{\Omega} U_1 d\Omega$$

$$\text{et } N = - \int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{11} dx_2 \quad ; \quad T = - \int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{21} dx_2 \quad (6)$$

$$M = \int_{-B/2}^{B/2} x_2 \sigma_{11} dx_2$$

L'expression (5) fait apparaître la puissance des efforts extérieurs comme un produit scalaire du vecteur $\underline{Q} = (\gamma, N, T, M)$ des paramètres de chargement par le vecteur $\underline{\dot{q}} = (\langle \underline{U}_1 \rangle, U_n, U_t, \omega)$ des paramètres cinématiques associés. On remarque en particulier que les paramètres de chargement relatifs à l'action de la semelle de fondation sont d'après (6) les éléments de réduction au point O du torseur des efforts appliqués par cette semelle sur le massif (Fig. 2-b).

Dans le cas particulier où le chargement de la semelle est appliqué par l'intermédiaire d'une liaison « rotulée » au point O, (Fig. 2-c), la valeur du paramètre de chargement M s'annule si cette liaison se fait sans frottement, le torseur des efforts appliqués par la semelle se réduisant à une force centrée inclinée $\underline{F}$ de composantes (N, T) appliquée au point O.

3

Analyse par la théorie du calcul à la rupture

Conformément au raisonnement du calcul à la rupture (Salençon, 1983, 1990), la stabilité de l'ouvrage sous l'action de la force (N, T) (le poids volumique γ étant fixé) suppose de mettre en évidence dans tout le massif un champ de contrainte $\underline{\sigma}$ en équilibre avec (N, T, M = 0) qui respecte le critère de résistance du sol en tout point. On peut alors définir dans le plan (N, T) un domaine, noté K, constitué de l'ensemble des chargements de la semelle pour lesquels la condition précédente est vérifiée et donc la stabilité de l'ouvrage, au sens du calcul à la rupture, assurée. Il est facile de montrer qu'un tel domaine est convexe et contient l'origine¹ (Fig. 3).

A partir de ce cadre général deux cas de chargement ont plus particulièrement retenu notre attention :

a) Le chargement est appliqué en bloquant tout mouvement horizontal de la semelle, ce qui revient à imposer $U_t = 0$.

b) La force est purement verticale (T = 0, M = 0).

La figure 4 indique schématiquement comment il est possible d'imposer expérimentalement de telles conditions de chargement.

¹ Cela signifie que le talus est stable sous l'action du seul poids propre en l'absence de tout chargement de la semelle (N = T = M = 0).

FIG. 3 **Domaine de stabilité de l'ouvrage sous l'action d'une force centrée inclinée (N, T).**
Stability domain under the action of an inclined force.

Nous allons tenter de comprendre pourquoi la première configuration de chargement est fondamentalement différente de la seconde dans le cas où elles s'appliquent à proximité d'un talus. Nous référant à la figure 3, il est facile de voir que la capacité portante dans le cas de chargement b), notée N_b^+ , correspond au point d'intersection de la frontière du domaine K avec l'axe des N.

Dans le cas de chargement a), la capacité portante notée N_a^+ , peut s'interpréter comme suit: elle correspond au maximum des valeurs du paramètre N pour lesquelles il existe une valeur du paramètre T (non fixée comme dans le cas b)) telle que (N, T) appartienne au domaine K. Géométriquement, cette valeur maximale peut s'interpréter comme l'ordonnée de la tangente horizontale au domaine K, ou encore comme l'ordonnée du point de la frontière de K pour lequel la normale extérieure est de la forme ($U_n \geq 0$, $U_t = 0$). On a donc dans le cas général, compte tenu de la convexité du domaine K, la relation:

$$N_a^+ \geq N_b^+ \quad (7)$$

FIG. 4 **Deux cas de chargement examinés.**
Two different loading modes.

Dans le cas particulier où le domaine K est symétrique par rapport à l'axe des N, ce qui correspond par exemple à la configuration d'un massif horizontal ($\beta = 0$), les deux valeurs précédentes coïncident et il n'y a pas lieu de distinguer les deux modes de chargement. Ce n'est bien évidemment pas le cas lorsque le chargement est appliqué à proximité d'un talus, qui va introduire une « dissymétrie » du domaine K d'autant plus marquée que le talus est proche de la semelle. Il nous faut donc examiner séparément ces deux cas de chargement. Ils correspondent à des situations différentes rencontrées dans la pratique. Si par exemple le cas d'une fondation de bâtiment, pour laquelle seul le poids propre de ce dernier entre en jeu, relève à l'évidence du second mode de chargement (charge purement verticale), celui d'une fondation de pile de pont constitue une configuration tendant à se rapprocher du premier mode de chargement, dans la mesure où les liaisons mécaniques entre la pile et le tablier de l'ouvrage empêchent les mouvements latéraux de la fondation.

L'analyse dimensionnelle du problème permet d'écrire les deux valeurs de capacité portante sous la forme:

$$N_a^+ = cB n_a^+ \left(\beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma H}{c}, \emptyset \right) \quad (8-a)$$

$$N_b^+ = cB n_b^+ \left(\beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma H}{c}, \emptyset \right) \quad (8-b)$$

où n_a^+ et n_b^+ sont des fonctions adimensionnelles des paramètres sans dimension qui caractérisent la géométrie du problème (β , D/B , H/B), la résistance du sol constitutif et le niveau de chargement ($\emptyset$ et $\gamma H/c$).

4

Approche du problème par la méthode cinématique

Cette méthode, que nous allons mettre en œuvre par la suite, peut se formuler comme suit.

Étant donné un champ de vitesse (virtuel) $\underline{U}$ quelconque défini dans le plan Ox_1x_2 , il apparaît qu'une condition nécessaire de stabilité de l'ouvrage est que la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ de

vitesse demeure inférieure à la *puissance résistante maximale*.

$$\forall \underline{U} \quad P_e(\underline{U}) \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (9)$$

avec

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}; \llbracket \underline{U} \rrbracket) d\Sigma \quad (10)$$

où $\underline{d}$ représente le taux de déformation associé à $\underline{U}$, $\llbracket \underline{U} \rrbracket$ désigne le saut de vitesse à la traversée d'éventuelles surfaces de discontinuité Σ en suivant la normale $\underline{n}$ et (Salençon, 1983, 1990):

$$\pi(\underline{d}) = \sup_{\underline{\sigma}} \{ \underline{\sigma} : \underline{d}; f(\underline{\sigma}) \leq 0 \}$$

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \underline{U} \rrbracket) = \sup_{\underline{\sigma}} \{ (\underline{\sigma}, \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{U} \rrbracket; f(\underline{\sigma}) \leq 0 \}$$

$f(\underline{\sigma}) \leq 0$ représentant la condition associée au critère de résistance du sol constitutif.

Les expressions de ces fonctions « π », nécessaires au calcul de $P_{rm}(\underline{U})$ dans le cas d'un matériau de Coulomb sont:

$$\pi(\underline{d}) = \begin{cases} c \cot(\varnothing) \operatorname{tr}(\underline{d}) & \text{si } \operatorname{tr}(\underline{d}) \geq (|d_1| + |d_2|) \sin(\varnothing) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.a)$$

d_1 et d_2 sont les valeurs propres de $\underline{d}$ dans le plan.

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \underline{U} \rrbracket) = \begin{cases} c \cot(\varnothing) \llbracket \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{n} & \text{si } \llbracket \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq |\llbracket \underline{U} \rrbracket| \sin(\varnothing) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.b)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur normal à la ligne de discontinuité et $\llbracket \underline{U} \rrbracket$ la valeur de cette discontinuité à la traversée de cette ligne.

En ce qui concerne le calcul de $P_e(\underline{U})$, il convient tout d'abord de noter que les champs de vitesse doivent être *cinématiquement admissibles*, ce qui implique des conditions différentes suivant le cas de chargement envisagé. Ils devront dans les deux cas satisfaire une condition de la forme:

$$\underline{U} = U_n \underline{e}_1 + U_t \underline{e}_2 - \omega x_2 \underline{e}_1 \quad (12)$$

pour $x_1 = 0$, $x_2 \in [-B/2, B/2]$

avec

a) $U_t = 0$ dans le premier cas,

b) aucune condition sur U_n , U_t et ω dans le second cas.

L'expression de la puissance des efforts extérieurs prend alors la forme unique, à partir de (5):

$$P_e(\underline{U}) = NU_n + \gamma < U_1 > \quad (13)$$

et l'inégalité (9) peut dès lors être réécrite sous la forme:

$$NU_n + \gamma < U_1 > \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (14)$$

avec

a) dans le premier cas: $\underline{U}$ *cinématiquement admissible* avec $U_n > 0$ et $U_t = 0$.

b) dans le second cas: $\underline{U}$ *cinématiquement admissible* avec $U_n > 0$.

Remarques: * Il est essentiel d'observer, qu'en dépit des expressions formellement identiques des majorants de N_a^* et N_b^* donnés par (14), respectivement dans les cas a) et b), la classe des champs de vitesse qu'il est possible d'explorer dans le premier cas de chargement est *plus restreinte* que dans le second cas de chargement puisque de tels champs de vitesse doivent vérifier la condition supplémentaire $U_t = 0$. Les consé-

quences pratiques d'une telle remarque vont apparaître lors de la mise en œuvre de l'approche cinématique à laquelle nous allons procéder.

* Le talus étant supposé stable en l'absence de toute surcharge exercée sur la semelle, l'inégalité (14) où l'on prend $N = 0$, est vérifiée pour tout champ de vitesse. Il en résulte que puisque $U_n > 0$, le rapport $(P_{rm}(\underline{U}) - \gamma < U_1 >) / U_n$, toujours positif, constitue un majorant de la capacité portante.

5

Description des mécanismes étudiés et mise en œuvre de l'approche cinématique

Pour chacun des cas de chargement envisagés ci-dessus, nous allons utiliser une famille de champs de vitesse virtuels («*mécanismes*») compatibles avec les conditions aux limites en vitesse imposées par le mode de chargement. Ces mécanismes constituent une généralisation du mécanisme classique de Prandtl, symétrique, qui conduit, dans le cas d'un sol non pesant, à la détermination de la valeur exacte de la capacité portante d'une fondation sur sol horizontal soumise à une charge verticale centrée. Dans le second cas de chargement, des mécanismes avec bloc en rotation, de type «*instabilité*» sont également envisagés.

5.1

Premier cas de chargement ($U_t = 0$)

Le mécanisme de rupture retenu, représenté sur la figure 5 et dénoté M_a , met en jeu quatre paramètres angulaires ($\alpha, \alpha', \delta, \delta'$). Il est composé de cinq zones:

– un triangle quelconque ayant un côté «*confondu*» avec la base de la fondation et animé d'une vitesse de translation verticale $\underline{U}$ égale à la vitesse de la fondation.

– deux zones en déformation (de type «*éventail*»), placées de chaque côté du triangle, limitées par des arcs de spirale logarithmique d'angle $\varnothing$ et de foyers M et Q (ces spirales deviennent bien évidemment des arcs de cercle dans le cas d'un sol purement cohérent), et à l'intérieur desquelles la vitesse, purement orthoradiale, est constante.

– un triangle et un quadrilatère animés d'un mouvement de translation de vitesses respectives $\underline{W}$ et $\underline{W}'$.

En supposant que soient vérifiées sous forme d'égalités les conditions pour lesquelles les fonctions π définies par les équations (11) demeurent bornées, l'hodographe des vitesses tracé sur la figure 5 permet d'exprimer le champ de vitesse, et en particulier les discontinuités de vitesse entre les zones, en fonction de la vitesse virtuelle $\underline{U}$ du premier bloc, des différents angles qui définissent la géométrie des mécanismes ($\alpha, \alpha', \delta, \delta'$) et bien sûr de l'angle de frottement interne $\varnothing$.

La puissance résistante maximale développée dans un tel mécanisme se met alors sous la forme:

$$P_{rm}(\underline{U}) = cUB f_a(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}; \alpha, \alpha', \delta, \delta')$$

tandis que la puissance des forces extérieures définie par (13) comporte deux termes:

FIG. 5 Cas de chargement où la fondation est astreinte à se déplacer verticalement ($U_t = 0$) : mécanisme « M_a ».
Case when the footing is subject to no horizontal displacement : mechanism « M_a ».

FIG. 6 Cas de la force verticale centrée : mécanisme « M'_b »
Case of a vertical centered load : mechanism « M'_b »

- L'un relatif aux forces de pesanteur :

$$\gamma < U_1 > = \gamma U B^2 g_a \left(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}; \alpha, \alpha', \delta, \delta' \right)$$

- Le second relatif à l'action du poinçon sur le massif :

$$NU_n = NU$$

La condition nécessaire de stabilité (14) devient dans ce cas, en simplifiant par $U > 0$:

$$N + \gamma B^2 g_a \leq c B f_a$$

ou encore, puisque N_a^* représente la valeur extrême du paramètre de chargement :

$$N_a^* \leq c B n_a \left(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}, \alpha, \alpha', \delta, \delta' \right) \quad (15)$$

où $n_a = f_a - \gamma B/c g_a$ est une fonction sans dimension des paramètres adimensionnels du problème, ainsi que des paramètres angulaires définissant la géométrie du mécanisme. C'est par rapport à ces derniers qu'il convient de rechercher le minimum par voie numérique, de façon à obtenir la meilleure majoration possible dans cette classe de mécanismes :

$$N_a^* \leq c B \min_{(\alpha, \alpha', \delta, \delta')} n_a \quad (16)$$

5.2

Deuxième cas de chargement ($T = 0$)

Deux types de mécanismes sont envisagés :

5.2.1

Mécanisme de « poinçonnement » (M'_b)

Dans ce cas de chargement, la classe de mécanismes retenue (représentée sur la figure 6 avec l'hodographe des vitesses correspondant) exploite le fait que la fondation peut se déplacer librement dans la direction horizontale. Une telle classe de mécanismes met en jeu trois angles de minimisation : α , μ et δ .

Il vient alors immédiatement :

$$P_{rm}(\underline{U}) = c U B f_b \left(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}; \alpha, \mu, \delta \right)$$

$$\gamma < U_1 > = \gamma U B^2 g'_b \left(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}; \alpha, \mu, \delta \right)$$

$$NU_n = NU \sin(\mu - \varnothing)$$

où U désigne la norme de la vitesse du bloc situé sous la fondation.

FIG. 7 Mécanisme d'« instabilité » (M_b^2)
« Instability » mechanism (M_b^2)

D'où en explicitant l'inégalité (14)

$$N_b^* \leq cB \min_{(\alpha, \mu, \delta)} n_b^1(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}, \alpha, \mu, \delta) \quad (17)$$

5.2.2

Mécanisme d'« instabilité » (M_b^2)

L'approche cinématique précédente doit être complétée par l'exploration de mécanismes par blocs en rotation (Fig. 7) dont on connaît la pertinence dans l'analyse des problèmes de stabilité de pentes et de talus sous poids propre (d'où la dénomination). Le volume de sol $T I_2 I_1$, délimité par un arc de spirale logarithmique d'angle $\varnothing$ et de foyer Ω , est animé d'un mouvement de rotation de vitesse ω autour de ce même point Ω . Les paramètres géométriques caractérisant un tel mécanisme sont les angles θ_1 et θ_2 , ainsi que le paramètre sans dimension η définissant, sur le parement du talus, le point d'émergence I_2 de l'arc de spirale logarithmique ($\eta \in [0, 1]$).

Les expressions respectives de $P_m(\underline{U})$, $\gamma < U_1 >$ et NU_n sont de la forme :

$$P_m(\underline{U}) = c\omega H^2 f_b^1(\varnothing, \beta; \theta_1, \theta_2, \eta)$$

$$\gamma < U_1 > = \gamma\omega H^3 g_b^1(\varnothing, \beta; \theta_1, \theta_2, \eta)$$

$$NU_n = N\omega H h_b^2(\beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}; \theta_1, \theta_2, \eta)$$

d'où d'après (14), en simplifiant par $\omega > 0$, compté positivement dans le sens rétrograde :

$$N_b^* \leq cB \min_{(\theta_1, \theta_2, \eta)} n_b^2(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}, \theta_1, \theta_2, \eta) \quad (18)$$

où le domaine de variation des paramètres de minimisation est tel que la courbe $I_2 I_1$ débouche d'une part sur le parement du talus, d'autre part à l'arrière de la fondation (point I_1).

En résumé :

- Dans le premier cas de chargement, l'exploration des mécanismes de poinçonnement de type « M_b^1 » et l'optimisation corrélative du majorant obtenu en fonction des paramètres angulaires (Inégalité (16)) conduit à une majoration de la capacité portante de la forme :

$$\frac{N_b^*}{cB} = n_b^* \leq \tilde{n}_b(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}) \quad (19)$$

- Dans le second cas de chargement (force verticale centrée) les deux classes de mécanismes (« M_b^1 » et « M_b^2 ») pourront être explorés, et le plus faible des deux minima correspondants (Inégalités (17) et (18)) constituera le meilleur majorant possible de la capacité portante :

$$\frac{N_b^*}{cB} = n_b^* \leq \tilde{n}_b(\varnothing, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}) \quad (20)$$

La mise en œuvre de cette approche sous la forme d'un outil numérique opérationnel permet l'exploration rapide d'un grand nombre de situations. Nous en présentons dans ce qui suit quelques applications.

6

Capacité portante d'une fondation au bord d'une excavation

On s'intéresse à la situation fréquemment rencontrée en site urbain, dans laquelle on vient creuser une excavation verticale à proximité d'une fondation superficielle soumise à un mode de chargement correspondant à une force verticale centrée (poids propre d'un bâtiment). Prenant pour fixer les idées $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $B = 0,75 \text{ m}$ et $D = 1,5 \text{ m}$ (d'où $D/B = 2$), on recherche la façon dont évolue la capacité portante de la fondation au fur et à mesure du creusement de l'excavation, c'est-à-dire de l'augmentation du rapport H/B dans les deux cas de figure suivants :

- Sol purement cohérent, de type argile : $c = 50 \text{ kPa}$, $\varnothing = 0^\circ$ d'où $\gamma B/c = 0,3$.
- Sol cohérent et frottant : $c = 15 \text{ kPa}$, $\varnothing = 30^\circ$ d'où $\gamma B/c = 1$.

Les courbes de la figure 8 représentent les variations de l'évaluation de la capacité portante obtenue par la méthode cinématique mettant en œuvre les mécanismes « M_b^1 » et « M_b^2 », et rapportée à celle correspondant au massif horizontal semi-infini ($H/B = 0$), en fonction du rapport H/B .

La courbe en trait plein, correspondant au cas du sol purement cohérent montre au fur et à mesure que croît l'excavation, une première diminution notable de la capacité portante, suivie d'un « palier de stabilisation » autour de la valeur 0,72 puis d'une chute brutale à partir de $H/B = 10$, jusqu'à la valeur nulle qui correspond à la ruine de l'ouvrage sous poids propre, c'est-à-dire à la valeur classique $\gamma H/c \approx 3,83$. On a indiqué sur la courbe les « modes de rupture » les plus critiques, c'est-à-dire ceux qui conduisent à la valeur la plus faible du majorant de la capacité portante : (P) pour le mécanisme de « poinçonnement » (« M_b^1 »), (I) pour le mécanisme d'« instabilité » (« M_b^2 »).

La forme particulière de cette courbe peut surprendre et conduit en conséquence à s'interroger sur

Incidence du mode de chargement sur la capacité portante

Afin d'évaluer quantitativement la différence entre les deux modes de chargement de la semelle de fondation décrits précédemment, l'approche cinématique a été appliquée au cas d'une fondation située à proximité d'une pente semi-infinie ($H/B \rightarrow +\infty$) d'angle β inférieur à l'angle de frottement interne ϕ du sol constitutif de manière à assurer sa stabilité sous poids propre. La figure 9 donne dans le cas $\phi = 38^\circ$, $\gamma B/c = 1,44$ et pour deux angles de pente $\tan \beta = 1/3$ et $2/3$, l'évaluation des estimations de la capacité portante en fonction de l'éloignement relatif D/B de la fondation pour chaque cas de chargement. Ces évaluations par excès sont fournies en explorant la classe de mécanismes « M_a » dans le premier cas, celle des mécanismes « M_b » dans le second cas, les mécanismes « M_b^c » conduisant dans le cas présent à des valeurs supérieures.

FIG. 9 Influence du mode de chargement de la semelle de fondation sur les évaluations de la capacité portante.
Influence of footing loading mode on bearing capacity estimates.

FIG. 8 Variation de capacité portante en fonction de la profondeur de l'excavation.
Bearing capacity as a function of the excavation depth.

la pertinence des mécanismes considérés dans le cadre de l'approche cinématique par l'extérieur, c'est-à-dire sur la précision des évaluations par excès de la capacité portante ainsi obtenues. C'est pourquoi il a paru intéressant de comparer ces évaluations aux résultats de calculs élastoplastiques par éléments finis réalisés au moyen du code PLAXIS (1990), où l'on adopte comme critère de résistance du sol, le critère de plasticité parfaite et où les charges limites (cercles sur la figure) correspondent aux valeurs asymptotiques des courbes effort-déplacement. On observe une très bonne concordance entre les deux approches numériques qui vient conforter et justifier le choix des mécanismes retenus pour analyser le problème. Il convient toutefois de remarquer que les temps de calculs requis pour mettre en œuvre l'approche cinématique sont considérablement inférieurs à ceux nécessités par un calcul élastoplastique par éléments finis. En outre il est clair que les valeurs calculées par cette approche, constituent des bornes supérieures rigoureuses de la capacité portante, tandis que les calculs élastoplastiques pas à pas, en raison de difficultés numériques rencontrées à mesure que l'on s'approche de la charge limite, peuvent parfois conduire à des estimations erronées. On se reportera sur ce dernier point aux travaux de Nagtegaal *et al.* (1974), Sloan et Randolph (1982) ou Marti et Cundall (1982), ainsi qu'aux travaux numériques récents de Buhan et Maghous (1994) dans le domaine du calcul à la rupture.

La seconde courbe en trait pointillé concerne le cas du sol cohérent et frottant. On observe une diminution encore plus brutale que dans le cas purement cohérent de la capacité portante sans apparition du « palier » de stabilisation. La comparaison avec les résultats de calculs élastoplastiques (points noirs) montre là encore la bonne concordance entre les deux approches, « validant » en quelque sorte le choix des classes de mécanismes explorés dans l'approche cinématique.

Les courbes obtenues confirment et précisent la portée du résultat théorique énoncé précédemment, relatif aux valeurs exactes des capacités portantes (Inégalité (7)). La différence entre les deux modes de chargement devient différente dès que l'on s'écarte de la situation où la semelle s'applique sur un massif semi-infini ($D/B \rightarrow +\infty$). Elle est d'autant plus accentuée que l'angle de la pente est élevé. Ainsi pour une fondation placée au bord d'un talus ($D/B = 0$), tel que $\tan \beta = 2/3$, le rapport entre les évaluations obtenues est de l'ordre de 2. Ce résultat met clairement en évidence l'importance qu'il y a à bien préciser le mode de chargement appliqué à la fondation.

Prise en compte d'un critère de résistance tronqué en traction

8.1

Position du problème

Les analyses précédentes reposent sur l'adoption pour le sol constitutif d'un critère de résistance de Coulomb caractérisé par les paramètres c et ϕ , définissant la courbe intrinsèque formée de deux demi-droites dans le plan de Mohr. Or de nombreuses données expérimentales font apparaître pour des sols pulvérulents compacts tout comme pour des argiles lorsque l'analyse est menée en « contraintes effectives », une non linéarité de la courbe intrinsèque au voisinage de l'origine, c'est-à-dire dans le domaine des faibles contraintes de compression. Certains auteurs suggèrent de prendre en compte une telle non linéarité par le biais d'un critère de type « parabolique » : Charles (1982), Fry et Vézole (1992), Mesri et Abdel-Ghaffar (1993). D'autres, souhaitant mettre principalement l'accent sur le défaut, voire l'absence totale, de résistance à la traction notamment pour des milieux cohérents, ont adopté un critère « tronqué en traction » pour traiter par exemple des problèmes de stabilité du front de taille d'un tunnel (Dormieux et Leca, 1992, 1993) ou bien de dimensionnement de fondations sous charges excentrées inclinées (Pecker et Salençon, 1992). C'est ce second point de vue que nous retiendrons ici.

8.2

Critère de Tresca « tronqué en traction » et mise en œuvre de l'approche cinématique

Un tel critère correspond à la courbe intrinsèque représentée sur la figure 10, délimitée par un cercle de Mohr de diamètre $2c$ tangent à l'origine (les contraintes de traction sont comptées positivement).

FIG. 10 Critère de Tresca avec absence de résistance à la traction.
« Tension cut-off » Tresca strength condition.

Les fonctions π ont pour expressions (Salençon, 1983) :

$$\pi(\underline{d}) = \begin{cases} c(|d_I| + |d_{II}| - \text{tr}(\underline{d})) & \text{si } \text{tr}(\underline{d}) \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (21.a)$$

$$\pi(\underline{N}, \underline{U}) = \begin{cases} c(|\underline{U}| - \underline{N} \cdot \underline{U}) & \text{si } \underline{U} \cdot \underline{U} \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (21.b)$$

Outre les mécanismes déjà décrits, et qui demeurent pertinents pour $\phi = 0^\circ$ dans le cas d'un matériau sans résistance à la traction, nous allons considérer dans l'analyse qui va suivre le mécanisme par bloc en translation schématisé sur la figure 11 et caractérisé par les cinq paramètres sans dimension : α , ψ , η , ξ et δ . Le mécanisme est compatible avec le mode de chargement « b » dans lequel les mouvements horizontaux de la fondation sont autorisés. La mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture utilisant un tel mécanisme conduit à l'obtention d'un majorant de la capacité portante, que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{N_b}{cB} = n_b^+ \leq \min_{\alpha, \psi, \eta, \xi, \delta} n_b^3(\phi = 0^\circ, \beta, \frac{D}{B}, \frac{H}{B}, \frac{\gamma B}{c}; \alpha, \psi, \eta, \xi, \delta) \quad (22)$$

FIG. 11 Mécanisme par bloc en translation.
Mechanism with translating block.

Reprenant le problème de la capacité portante d'une fondation située à proximité d'une fouille verticale, que nous avons déjà examiné au paragraphe 6, l'analyse par la méthode cinématique a été complétée dans le cas d'un sol cohérent sans résistance à la traction en utilisant le mécanisme précédent. Les résultats correspondants sont reportés sur la figure 12 où l'on a pris $D/B = 0$ (fondation en bord d'excavation) et $\gamma B/c = 1$. La courbe en trait plein est relative aux évaluations du facteur sans dimension N/cB , caractérisant la capacité portante, fournies par les mécanismes « M_b^1 » et « M_b^2 » (identiques à celles qui seraient obtenues dans le cas d'un sol avec résistance à la traction), tandis que la courbe en pointillé représente les résultats obtenus

FIG. 12 Courbe d'évolution de la capacité portante en fonction de la hauteur excavée dans le cas d'un sol de Tresca sans résistance à la traction.
Bearing capacity versus excavation depth: case of a « tension cut-off » Tresca condition.

par l'utilisation du mécanisme par bloc en translation décrit précédemment. Elle vient couper la demi-droite verticale d'équation $H/B = 2$ qui est associée à l'instabilité du talus sous poids propre. Cette dernière valeur est classiquement obtenue tant par une approche statique (champs de contrainte à trois zones) que par une approche cinématique mettant en œuvre un mécanisme « évanescent » (Drucker, 1953). On constate ainsi une diminution très sensible de la capacité portante due au défaut de résistance en traction du sol dès que

H/B est supérieur à l'unité. En deçà de cette valeur en revanche, et tout en demeurant prudent sur les conclusions qu'il faut tirer des résultats ainsi obtenus qui ne constituent *stricto sensu* que des majorants de la capacité portante, il semble que ce défaut de résistance en traction ne joue aucun rôle.

9

Conclusion

Nous avons montré comment la théorie du Calcul à la Rupture permettait de formuler, puis de résoudre de manière cohérente et structurée la question du dimensionnement d'une fondation localisée près d'une pente ou d'une excavation. La méthode de calcul qui en découle, fondée sur l'exploration de mécanismes de rupture semblables à ceux que l'on peut observer expérimentalement, a conduit à l'élaboration d'un outil numérique fournissant une évaluation rapide des conditions de stabilité de ce type d'ouvrage. Compte tenu du fait qu'une telle évaluation est en toute rigueur une estimation par excès, il importera dans le cadre d'une approche de la sécurité de type calcul aux « états limites ultimes », de l'affecter d'un coefficient réducteur estimé par exemple par comparaison avec l'expérience.

En raison de sa portée tout à fait générale, l'approche théorique retenue peut par ailleurs être étendue au cas d'une fondation de forme rectangulaire pour laquelle les conditions de « déformations planes » qui ont été adoptées jusqu'alors ne sont plus applicables. Sa mise en œuvre, qui repose sur l'exploration de mécanismes tridimensionnels, fait actuellement l'objet de recherches devant très prochainement aboutir.

- Bakir N. (1993) – *Étude sur modèles centrifugés de la capacité portante de fondations superficielles*, Thèse de doctorat de l'EC de Nantes.
- Bauer G.E., Shields D.H. (1981) – *Bearing capacity of footings in granular slopes*, CR Int. Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. II, Stockholm, pp. 33-36.
- De Buhan P., Maghous S. (1994) – *A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures*, Eur. J. of Mech., / A Solids. Accepté pour publication.
- Charles J.A. (1982) – *An appraisal of the influence of a curved failure envelope on slope stability*, Geotechnique, vol. 32, n° 4.
- Dembicki E., Zadroga B. (1974) – *Model tests on bearing capacity of foundations on slopes*, CR Danube-European Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Bled, pp. 147-153.
- Leca E., Dormieux L. (1992) – *Contribution à l'étude de la stabilité du front de taille d'un tunnel en milieu cohérent*, Revue Française de Géotechnique, n° 61, pp. 5-16.
- Dormieux L., Leca E. (1993) – *Stabilité du front de taille d'un tunnel dans un milieu sans résistance à la traction*, CR Geotech. Eng. of Hard Soils – Soft Soils, Athènes, vol. 2, pp. 1409-1415.
- Drucker D.C. (1953) – *Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*, Jour. Mech. Phys. Solids, vol. 1, n° 4, pp. 217-226.
- Projet de fascicule 62 – Titre V (1992) – *Règles techniques de conception et de calcul des fondations des ouvrages de génie civil*, 168 p.
- Fry J.J., Vezole P. (mai 1992) – *Stabilité des talus, cas des sols à critère de résistance parabolique, approche cinématique du calcul à la rupture* Ann. ITBTP, série : sols et fondations, pp. 130-180.
- Garnier J., Shields D.H. (1989) – *Foundations at the top of slopes*, CR Int. Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering, DE Mello volume, Rio, pp. 411-422.
- Gemperline M.C. (1984) – *Centrifugal model tests for ultimate bearing capacity of footings on steep slopes in cohesionless soil* REC-ERC-84-16, U.S. Department of the Interior, Bureau of reclamations, Denver, Colorado.
- Giroud J.P., Tran-Vo-Nhiem (juillet-août 1971) – *Force portante d'une fondation sur une pente*, Ann. ITBTP., série : Théories et méthodes de calcul, pp. 130-180.
- Kusakabe O., Kimura T., Yamaguchi H. (1981) – *Bearing capacity of slopes under strip loads on the top surfaces*, Soils and Foundations, vol. 21, n° 4, pp. 29-40.
- Marti J., Cundall P. (1982) – *Mixed discretization procedure for accurate modelling of plastic collapse*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., vol. 6, pp. 129-139.
- Mesri G., Abdel-Ghaffar M.E.M. (1993) – *Cohesion intercept in effective stress-stability analysis*, Journ. of Geotech. Eng., Vol. 119, n° 8, pp. 1229-1249.
- Nagtegaal J.C., Parks D.M., Rice J.R. (1974) – *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 4, pp. 153-177.
- Narita K., Yamaguchi H. (1990) – *Bearing capacity analysis of foundations on slopes by use of log-spiral sliding surfaces*, Soils and Foundations, vol. 30, n° 3, pp. 144-152.
- Pecker A., Salençon J. (1992) – *Capacité portante d'une fondation sous chargement excentré et incliné*, Journée scientifique à la mémoire de D. Radenkovic, Palaiseau. LMS (École Polytechnique).
- Salençon J. (1974) – *Quelques résultats théoriques concernant la butée d'une paroi sur un coin plastique*, Annales de l'ITBTP, série : Théories et méthodes de calcul, n° 165, pp. 187-194.
- Salençon J. (1983) – *« Calcul à la rupture et analyse limite »*, Presses de l'ENPC.
- Salençon J. (1990) – *An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics*, Eur. Jour. of Mech., A/Solids, vol. 9, n° 5, pp. 477-500.
- Shields D.H., Scott J.D., Bauer G.E. (1977) – *Bearing capacity of foundations near slopes* CR Int. Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. II, Tokyo, pp. 715-720.
- Sloan S.W., Randolph M.F. (1982) – *Numerical prediction of collapse loads using finite element methods*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., vol. 6, pp. 47-76.
- Vermeer P.A. (1991) – *Plaxis, version 4.0*, edit. A.A. Balkema.