

Étude des écoulements en milieux poreux par la méthode de Monte Carlo

G. AUVINET

Laboratoire
de Géomécanique,
ENSG, rue du
Doyen Marcel-Roubault,
B.P. 40, 54501,
Vandœuvre-lès-Nancy,
France
Instituto de Ingenieria,
UNAM,
Ciudad Universitaria,
Apdo Postal 70-472,
Coyacan 04510,
Mexico D.F., Mexique

Résumé

La méthode de Monte Carlo permet de résoudre les problèmes d'écoulements permanents en milieux poreux. L'article révisé les bases théoriques de cette technique et montre comment la procédure de mise en œuvre doit être adaptée quand le milieu est anisotrope et hétérogène. Des exemples d'application sont présentés. On analyse par ailleurs le problème du temps de calcul nécessaire pour obtenir une précision déterminée. On montre que la convergence extrêmement lente de la méthode la rend, en général, peu attrayante pour les problèmes courants. On met, en revanche, en évidence l'intérêt qu'elle peut présenter pour les problèmes tridimensionnels à géométrie complexe. L'utilité des procédés permettant de réduire la variance de l'estimateur du potentiel hydraulique et donc d'accélérer la convergence est, en outre, évaluée.

Monte Carlo techniques applied to analysis of flow through porous media

Abstract

Monte Carlo techniques can supply solutions to the problem of steady-state seepage through porous media. In this paper, the basis of the method are reviewed together with its practical application to anisotropic and heterogeneous media. Some examples are included. A procedure to evaluate the computing time required to reach a given accuracy is presented. It is shown that the convergence of the method is extremely slow. The potential of variance reducing techniques to increase the convergence rate is assessed. The method appears to be best suited for three-dimensional problems in domains with irregular configuration.

Introduction

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse du problème des écoulements permanents en milieux poreux. Les plus courants sont les procédés graphiques, analogiques ou numériques comme les méthodes par différences finies ou aux éléments finis (Humbert, 1984). On cite aussi souvent Scott, 1963 et Harr, 1989, mais il semble que l'on n'ait pas toujours bien interprété une autre approche qui permet de résoudre ce même type de problème : la méthode de Monte Carlo. Le but de cet article est de clarifier les bases théoriques et la procédure de mise en œuvre de la méthode, et de montrer que, dans certaines situations particulières, elle peut être utile à l'ingénieur. Sa simplicité lui donne en effet des avantages évidents par rapport aux méthodes classiques, surtout dans le cas des domaines d'écoulements tridimensionnels à géométrie complexe. On évalue par ailleurs ce que peuvent apporter les techniques de réduction de variance et, plus particulièrement, celle de l'échantillonnage d'importance, à l'accélération de la convergence de la méthode, généralement extrêmement lente.

Bases de la méthode

Le problème de Dirichlet

Comme on le sait, l'étude des écoulements en régime permanent dans les milieux poreux homogènes et isotropes se ramène à la solution du problème de Dirichlet, c'est-à-dire à la détermination dans un domaine fermé considéré D , d'une fonction h (dans ce cas la charge hydraulique) telle que :

$$\text{dans } D : \nabla^2 h = 0 \quad (1)$$

et en tout point Q de la frontière de D : $h = F(Q)$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien et $F(Q)$ une certaine fonction définissant les conditions aux limites.

Les techniques de Monte Carlo permettent de résoudre ce problème par différents procédés, le plus commun étant celui de la marche au hasard (Hammersley, 1965).

Méthode de la marche au hasard

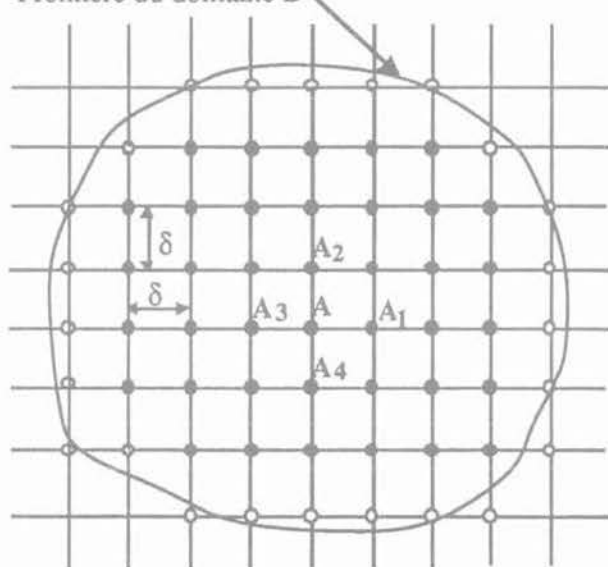
Pour résoudre numériquement le problème précédent, l'équation (1) peut être remplacée par son approximation en termes de différences finies. Dans le cas d'un domaine bidimensionnel D , cette démarche équivaut à superposer au domaine continu un maillage de pas δ dont les n nœuds peuvent être divisés en nœuds internes et de frontière (Fig. 1). Pour les nœuds internes A , l'équation (1) est remplacée par :

$$\frac{1}{\delta^2} [h(A_1) - 2h(A) + h(A_3)] + \frac{1}{\delta^2} [h(A_2) - 2h(A) + h(A_4)] = 0 \quad (2)$$

soit :

$$h(A) = \frac{1}{4} [h(A_1) + h(A_2) + h(A_3) + h(A_4)] \quad (3)$$

Frontière du domaine D



- Nœuds internes
- Nœuds de frontière

FIG. 1 Domaine de résolution du problème de Dirichlet.
Solving domain for Dirichlet problem.

Aux nœuds frontaliers, la charge hydraulique est approximativement égale à $F(Q)$ où Q est le point de la frontière le plus proche du nœud considéré. Les valeurs de la charge hydraulique aux n nœuds du maillage sont donc les solutions du système d'équations linéaires :

$$[H] = [F] + [M] [H] \quad (4)$$

où :

$[H]$: vecteur colonne des n charges hydrauliques h_i aux nœuds A_i ;

$[F]$: vecteur colonne à n composantes : $F_i = F(Q)$ pour les nœuds frontaliers et $F_i = 0$ pour les nœuds internes ;

$[M]$: matrice carrée de $n \times n$ éléments, m_{ij} égaux à $1/4$ ou nuls.

Le système d'équations (4) peut être résolu par des techniques conventionnelles comme la méthode des relaxations. La méthode dite de Monte Carlo consiste, quant à elle, à profiter à l'analogie qui existe entre la matrice $[M]$ et la matrice des probabilités de transition d'un processus aléatoire Markovien homogène particulièrement simple : celui de la marche au hasard. Cette chaîne de Markov décrit les mouvements d'un objet se déplaçant de façon aléatoire sur les nœuds d'un maillage analogue à celui de la figure 1 (on prend parfois l'exemple des déambulations d'un ivrogne : *drunkard's walk*). Cette analogie mathématique permet de résoudre le problème posé de façon approchée. Pour cela on a recours, comme on le verra ci-dessous, à des

simulations du processus de marche au hasard associé au problème d'écoulement considéré.

Soit un nœud A_0 du maillage où l'on souhaite déterminer la charge hydraulique. On simule une série de marches aléatoires au départ de ce point. Les probabilités de transition en un pas d'un nœud A_i à un autre A_j sont prises égales aux éléments m_{ij} de $[M]$. Pour un nœud interne, les probabilités de passage à chacun des quatre nœuds voisins sont donc égales à $1/4$. Par ailleurs, les nœuds de la périphérie sont considérés comme absorbants, c'est-à-dire que les trajectoires simulées se terminent en ces points quand elles les atteignent. Une trajectoire complète T passe donc par une série de nœuds :

$$S_T = (A_0, A_1, \dots, A_k) \quad (5)$$

où A_k est un nœud absorbant.

D'après le théorème de Chapman-Kolmogorof (Parzen, 1964), la probabilité de passer d'un nœud A_i à tout autre nœud A_j en r pas est égale à l'élément $m_{ij}^{(r)}$ de $[M]^r$. L'espérance mathématique de la valeur F_T de la fonction $F(Q)$ au nœud absorbant final pour les trajectoires partant de A_0 est donc :

$$E(F_T) = \sum_T P(T) F_T = F(A_0) + [M]_0(F) + [M]_0^2(F) + \dots + [M]_0^r(F) + \dots \quad (6)$$

où $[M]_0$ est le vecteur ligne de la matrice $[M]^r$ correspondant au nœud A_0 .

On remarquera que l'on peut sommer sur toutes les trajectoires T que l'on peut suivre en r pas, y compris celles qui ne se terminent pas par un nœud absorbant, puisque pour ces dernières la valeur de F_T est nulle.

En comparant les équations (4) et (6), on arrive immédiatement à la conclusion que le vecteur colonne à composantes $h_i = E(F_T | A_0 = A_i)$ est la solution du système d'équations (4). Pour estimer une de ces composantes h_i , il suffit donc de stimuler, au moyen de nombres aléatoires, une série de trajectoires partant du nœud A_i et de calculer la valeur moyenne de F_T . Cette valeur moyenne est un estimateur sans biais de la charge hydraulique au point A_i .

Il est important de souligner que la stimulation porte sur le processus de marche au hasard associé et non sur l'écoulement lui-même, comme l'ont apparemment cru certains auteurs pour lesquels la méthode consisterait à simuler les déplacements d'une particule d'eau dans le milieu poreux. Ce n'est évidemment pas le cas, puisqu'une particule d'eau se déplacerait de façon préférentielle dans la direction de l'écoulement.

2.3

Adaptation de la méthode (Auvinet, 1975)

2.3.1

Frontières imperméables

La présence de frontières imperméables peut facilement être prise en compte. On sait qu'une frontière imperméable est aussi une ligne d'écoulement ; on peut donc la considérer comme un axe séparant deux domaines symétriques par rapport à cet axe, dont l'un

est fictif, mais dont la réunion forme un domaine D du type considéré en 2.1. Si une trajectoire atteint un point A situé au-delà d'une frontière de ce type, on peut donc indifféremment la laisser se prolonger dans le domaine fictif ou la faire « rebondir » sur la frontière et la ramener dans le domaine réel. C'est bien entendu cette dernière solution qui est retenue. La marche au hasard reprend donc à partir du point symétrique du point A par rapport à la frontière imperméable (Fig. 2).

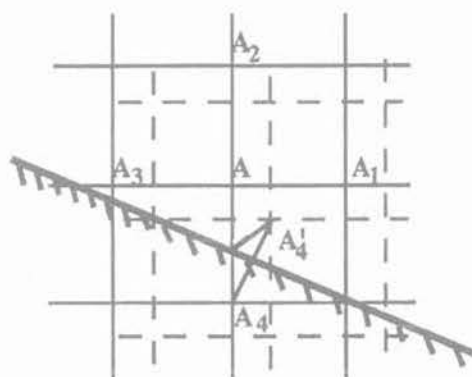


FIG. 2 Rebondissement sur les frontières imperméables. Bouncing on impervious boundaries.

2.3.2

Milieux anisotropes

Dans les milieux anisotropes, en particulier les milieux stratifiés, il est souvent possible de caractériser la perméabilité par un coefficient k_x dans une certaine direction X et par un autre coefficient k_y dans la direction Y perpendiculaire à la précédente. L'équation qui régit l'écoulement est alors :

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

Si on adopte un pas de maillage δx dans la direction X et δy dans la direction Y , l'équation précédente s'écrit en termes de différences finies :

$$\frac{k_x}{(\delta x)^2} [h(A_1) - 2h(A) + h(A_3)] + \frac{k_y}{(\delta y)^2} [h(A_2) - 2h(A) + h(A_4)] = 0 \quad (8)$$

On se ramène à l'équation (3) si le maillage est choisi de telle façon que :

$$\frac{k_x}{(\delta x)^2} = \frac{k_y}{(\delta y)^2} \quad (9)$$

soit :

$$\delta x = \delta y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \quad (10)$$

La méthode peut donc être appliquée aux milieux anisotropes en adoptant la règle précédente. On peut également, bien entendu, choisir de conserver un pas constant dans toutes les directions à condition d'appliquer au domaine d'écoulement une transformation :

$$x' = x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}; y' = y \quad \text{ou} \quad y' = y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}; x' = x \quad (11)$$

2.3.3

Domaines hétérogènes

Lorsque le domaine d'écoulement est hétérogène, il est nécessaire de le diviser en sous-domaines à perméabilités distinctes. A l'intérieur de chaque sous-domaine, la méthode s'applique sans modifications, mais une attention particulière doit être prêtée aux frontières entre ces différentes zones. Si un nœud coïncide avec une de ces frontières entre deux milieux de perméabilités respectives k_1 et k_2 (Fig. 3), on établit, à partir des équations aux différences finies (Juarez, 1969), que les probabilités de transition doivent être les suivantes :

$$\begin{aligned} P[AA_1] &= \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(k_1 - k_2)(1 - \tan \alpha)}{(k_1 + k_2)4(1 + \tan^2 \alpha)} \\ P[AA_2] &= \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(k_1 - k_2)\tan \alpha(1 - \tan \alpha)}{(k_1 + k_2)4(1 + \tan^2 \alpha)} \\ P[AA_3] &= \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(k_2 - k_1)(1 - \tan \alpha)}{(k_1 + k_2)4(1 + \tan^2 \alpha)} \\ P[AA_4] &= \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(k_2 - k_1)\tan \alpha(1 - \tan \alpha)}{(k_1 + k_2)4(1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned} \quad (12)$$

Certains auteurs interprétant la méthode en termes de simulation des mouvements d'une particule d'eau ont cru pouvoir recommander de modifier le pas du maillage lors du passage d'un milieu à l'autre proportionnellement à la perméabilité du nouveau milieu de

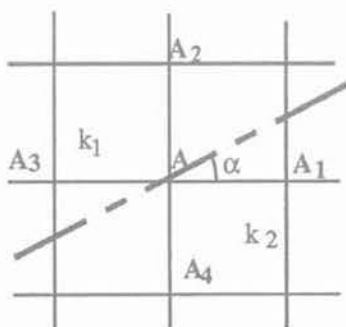


FIG. 3 Frontière entre matériaux à perméabilités différentes.
Transition between materials with different permeabilities.

façon à « accélérer » l'écoulement dans les milieux les plus perméables et à le « freiner » dans les moins perméables. Il s'agit bien entendu, comme on l'a déjà souligné, d'une confusion sur l'interprétation de la méthode. On vérifie facilement que cette façon de procéder n'est pas compatible avec les équations aux différences finies du problème. On s'en tiendra donc à la technique exposée ci-dessus.

2.3.4

Domaines tridimensionnels

La méthode peut être facilement adaptée aux domaines tridimensionnels. En effet, dans ce cas, si le milieu est homogène, l'équation (1) s'écrit en différences finies (Fig. 4) comme suit :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta^2} [h(A_1) - 2h(A) + h(A_3)] \\ &+ \frac{1}{\delta^2} [h(A_2) - 2h(A) + h(A_4)] \\ &+ \frac{1}{\delta^2} [h(A_5) - 2h(A) + h(A_6)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{soit :} \quad h(A) = \frac{1}{6} [h(A_1) + h(A_2) + h(A_3) + h(A_4) + h(A_5) + h(A_6)] \quad (14)$$

Les probabilités de transition d'un nœud interne aux nœuds voisins en un pas sont donc dans ce cas de 1/6.

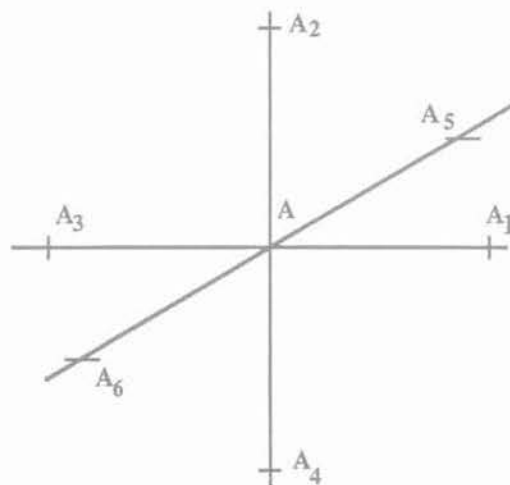


FIG. 4 Maillage tridimensionnel.
Three-dimensional mesh.

2.3.5

Autres adaptations

La méthode peut être adaptée sans difficultés aux écoulements axisymétriques. Elle permet également de tenir compte, le cas échéant, des surfaces libres d'écoulement, ainsi que des défauts d'ajustement entre le

maillage et les frontières. On peut aussi réduire les dimensions du maillage dans les zones à fort gradient hydraulique afin d'augmenter la précision de l'estimation (Auvinet, 1975).

3

Exemples de mise en œuvre de la méthode

3.1

Problèmes bidimensionnels

On a représenté sur la figure 5 un domaine classique d'écoulement correspondant aux infiltrations sous un barrage en terre au travers des matériaux perméables de fondation. Les dimensions sont celles de la digue de la rive gauche de l'aménagement de « El Cuchillo », un barrage d'une dizaine de kilomètres de long, construit pour l'alimentation en eau de la ville de Monterrey, au Mexique. Les fondations sont constituées par des alternances de couches horizontales de grès et de schistes fracturés à forte anisotropie de perméabilité. On a supposé que la perméabilité horizontale k_x était dix fois supérieure à la perméabilité verticale k_y . Une trajectoire typique obtenue par simulation du processus de marche au hasard associé aux conditions particulières d'écoulement sous cet ouvrage est représentée sur la figure 5. Le calcul a été fait pour un point situé sur l'axe de symétrie de la section transversale, à mi-hauteur de la couche perméable qui fait 12 m d'épaisseur. Le tirant étant $F_1 = 6$ m du côté amont et $F_2 = 0$ m du côté aval, où la surface du terrain a été prise comme plan de référence, la charge hydraulique au point considéré est, évidemment, de 3 m. La méthode

de Monte Carlo permet de retrouver ce résultat en procédant comme on l'a indiqué plus haut. Si m_1 trajectoires partant du point de calcul sont absorbées du côté amont (cas de la figure) et m_2 du côté aval, la valeur moyenne de la charge hydraulique à la sortie est :

$$h^* = \frac{m_1 F_1 + m_2 F_2}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

L'espérance mathématique de cet estimateur est la charge hydraulique au point de calcul. Sur cet exemple, la méthode n'est évidemment pas compétitive par rapport aux méthodes plus classiques. On notera en particulier que, même après un nombre important de marches au hasard, il subsiste un écart par rapport à la valeur théorique et que la précision exprimée au moyen de l'écart type de l'estimateur h^* reste décevante.

A titre d'illustration, on a représenté sur la figure 6 une trajectoire simulée dans le cas hypothétique où une paroi étanche serait mise en place dans les matériaux perméables de la fondation. Finalement, sur la figure 7, on a représenté une trajectoire dans un domaine plus complexe constitué par deux couches superposées à perméabilités différentes. La couche supérieure, dont la perméabilité est anisotrope, est coupée par une paroi étanche. Il a été supposé, par ailleurs, que la couche inférieure présentait une perméabilité isotrope inférieure d'un ordre de grandeur à la perméabilité horizontale de la couche supérieure. Aux frontières entre les deux couches, on a respecté les règles de transition définies en 2.3.3.

La méthode a été appliquée dans ce cas à l'aide d'un logiciel (MOCA2D) développé à l'École nationale supérieure de géologie de Nancy (Auvinet, 1994). Les données à fournir sont simplement les perméabilités des différents matériaux, les coordonnées des extrémités des différents segments qui délimitent le domaine d'écoulement et les zones à perméabilité homogène, ainsi que les conditions aux limites. Il n'est pas néces-

Point de calcul : $x = 62,5$; $y = -6$. Nombre de trajectoires : 1 000. $\delta x = 1,5$ m ; $\delta y = 0,47$ m. Nombre de pas : 1 888 428. Potentiel : 3,023 m. Écart-type : 0,095 m.

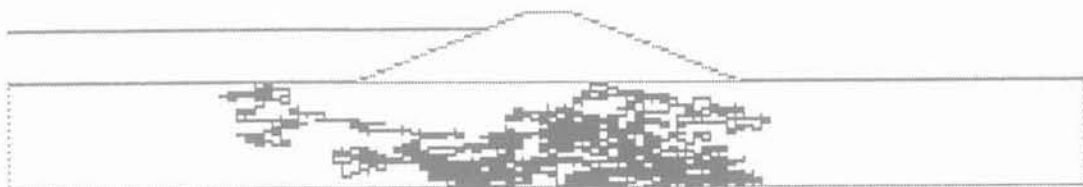


FIG. 5 Problème bidimensionnel.
Two-dimensional problem.

Point de calcul : $x = 62,5$; $y = -11$. Nombre de trajectoires : 1 000. $\delta x = 1,5$ m ; $\delta y = 0,47$ m. Nombre de pas : 2 080 208. Potentiel : 3,108 m. Écart-type : 0,095 m.

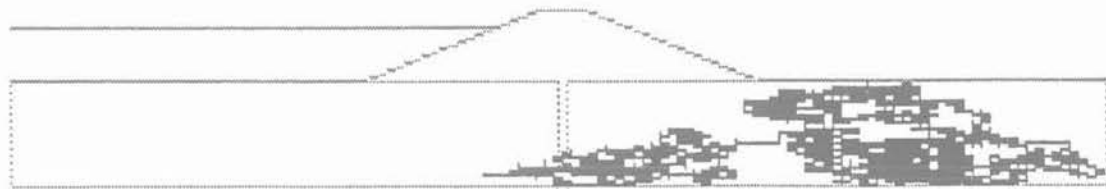


FIG. 6 Paroi étanche.
Cut-off wall.

Point de calcul : $x = 62,5$; $y = -18$. Nombre de trajectoires : 1 000. $\delta x = 1,5$ m ; $\delta y = 0,47$ m (couche supérieure). $\delta x = \delta y = 1,5$ m (couche inférieure). Nombre de pas : 3 258 468. Potentiel : 3,053 m. Écart-type : 0,095 m.

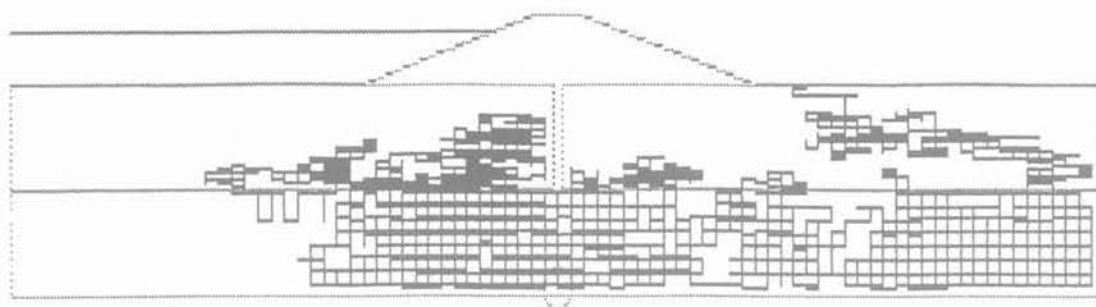


FIG. 7 Paroi étanche dans un bicouche.
Cut-off wall in a two layers system.

saire de définir explicitement un maillage *a priori*, puisqu'il suffit d'appliquer des accroissements positifs ou négatifs aux coordonnées du point en mouvement au gré des tirages de nombres aléatoires. Ce dernier aspect constitue un avantage non négligeable par rapport aux méthodes numériques aux éléments finis ou par différences finies.

3.2

Problèmes tridimensionnels

Un logiciel a également été développé pour les domaines tridimensionnels (MOCA3D). L'algorithme est similaire à celui décrit au paragraphe précédent, à ceci près que les frontières sont définies au moyen des

coordonnées des sommets d'aires triangulaires délimitant le domaine d'écoulement.

A titre d'illustration, une étude de l'influence sur la charge hydraulique du resserrement vers l'aval de la vallée alluviale, sous une digue analogue à celle étudiée précédemment, a été réalisée en utilisant la méthode (Fig. 8). Les calculs ont été effectués pour trois points situés sur l'axe longitudinal du domaine d'écoulement : en amont au point A ($x = 35$; $y = -3$), sous le barrage au point B ($x = 62,5$; $y = -6$) et en aval au point C ($x = 90$; $y = -3$), dans une zone où peuvent se présenter des gradients critiques. Les résultats sont présentés sur la figure 9. Ce type d'étude n'est plus réalisable par les méthodes graphiques et implique un travail ardu de définition de maillage pour les méthodes numériques de type éléments finis ou différences finies. La méthode de Monte Carlo conserve quant à elle toute sa simplicité.

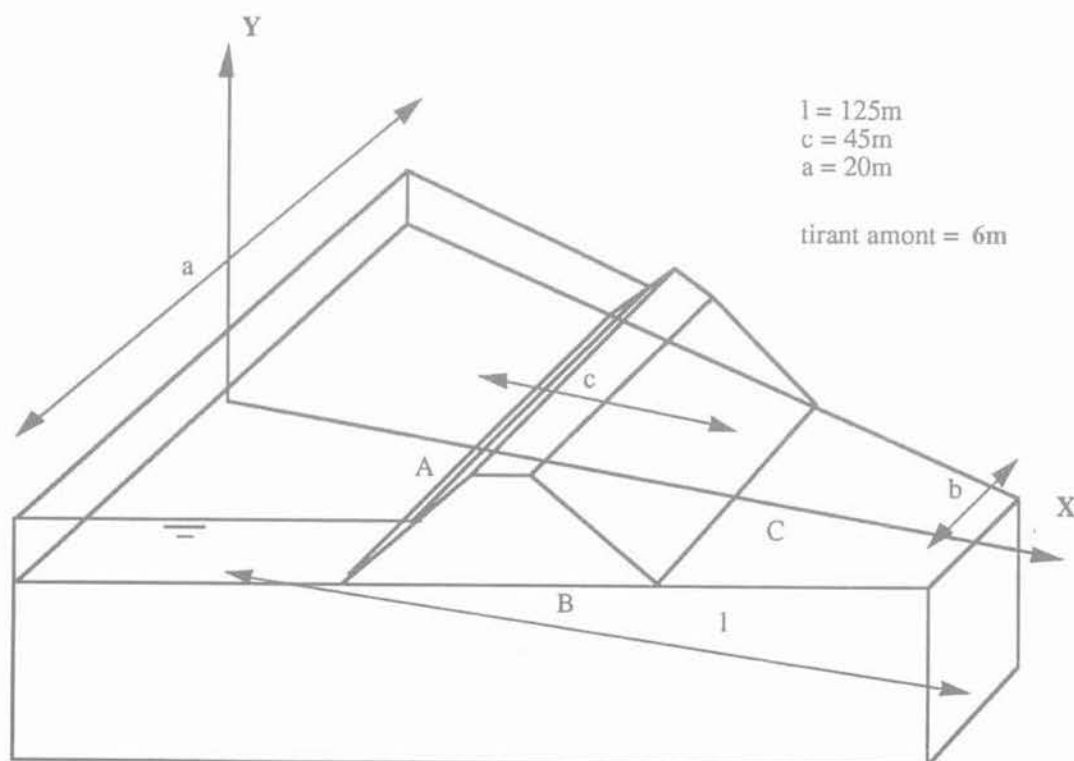


FIG. 8 Problème tridimensionnel.
Three-dimensional problem.

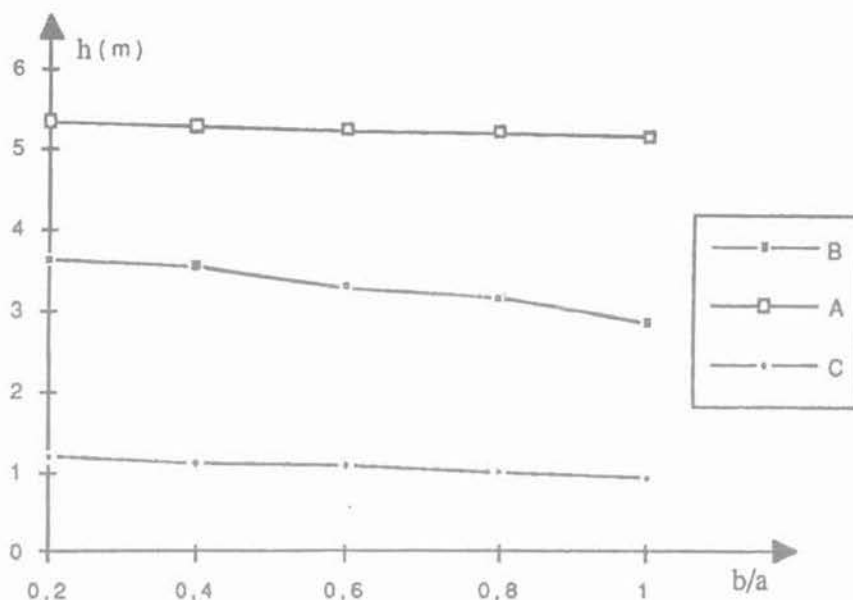


FIG. 9 Problème tridimensionnel.
Three-dimensional problem.

4

Temps de calcul et précision

4.1

Estimation de la durée d'une marche aléatoire

Le nombre n_p de pas aléatoires nécessaires pour qu'une trajectoire atteigne une des frontières absorbantes est une variable aléatoire. Son espérance mathématique N_j pour les trajectoires partant d'un nœud donné A_i peut être déterminée par les méthodes classiques de calcul du temps moyen d'absorption d'une chaîne de Markof (Parzen, 1964).

$$\text{On a : } N_j = E(n_p | A_0 = A_j) \quad (16)$$

$$N_j = \sum_{k=1}^m m_{jk} E(n_p | A_0 = A_j) \quad (17)$$

Si T est l'ensemble des nœuds internes et T^c celui des nœuds frontaliers :

$$N_j = \sum_T m_{jk} (1 + E(n_p | A_0 = A_j)) + \sum_{T^c} m_{jk} \quad (18)$$

$$\text{donc : } N_j = 1 + \sum_T m_{jk} N_k \quad (19)$$

Ce système d'équations linéaires permet théoriquement de déterminer l'espérance du nombre de pas nécessaires pour atteindre l'une des frontières absorbantes à partir des différents nœuds du maillage. On voit toutefois que la résolution de ce système est d'un degré de difficulté comparable à celui des équations de l'écoulement lui-même, ce qui en réduit considérablement l'intérêt. Dans certains cas particuliers, le système a néanmoins une solution simple.

Considérons par exemple le cas des écoulements sous une palplanche étanche fichée dans un milieu poreux homogène (Fig. 10). Le nombre moyen de pas verticaux (ascendants ou descendants) nécessaires pour atteindre la surface d'ordonnée k à partir d'un nœud A_i d'ordonnée j est indépendant de l'abscisse du nœud considéré et peut être calculé à l'aide du système (19).

$$\text{On a : } N_0 = 1 + N_1 \quad (20)$$

$$N_1 = 1 + \frac{N_0 + N_2}{2} \quad (21)$$

$$\text{et, en général : } N_{j-1} = 1 + \frac{N_{j-2} + N_j}{2} \quad (22)$$

$$\text{d'où : } N_1 = N_0 - 1 \quad (23)$$

$$N_2 = N_0 - 4 \quad (24)$$

$$\text{et, en général : } N_j = N_0 - j^2 \quad (25)$$

mais sur la frontière supérieure :

$$N_k = N_0 - k^2 = 0 \quad (26)$$

$$\text{donc, en général : } N_j = k^2 - j^2 \quad (27)$$

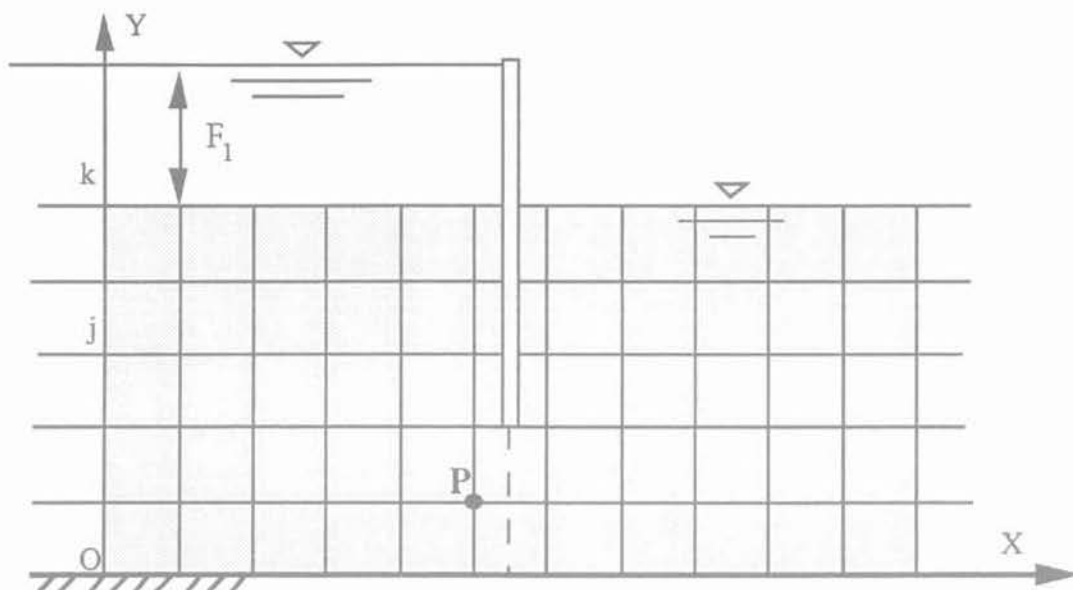


FIG. 10 Écoulement sous une palplanche.
Flow below a sheet-pile wall.

Cette expression donne le nombre moyen de pas verticaux nécessaires pour atteindre la frontière supérieure à partir d'un point d'ordonnée j . L'espérance du nombre de pas horizontaux est la même, puisqu'à chaque pas vertical correspond en moyenne un pas horizontal. L'espérance du nombre total de pas pour un écoulement bidimensionnel est donc égale à $2(k^2 - j^2)$. Dans le cas tridimensionnel, pour les domaines à parois latérales verticales, ce nombre passe simplement à $3(k^2 - j^2)$, ce qui ne constitue qu'une augmentation de 50 % et explique l'intérêt que présente la méthode pour ce type de problèmes. Dans le cas des domaines à frontières imperméables multiples (Fig. 5 et 6) les estimations précédentes ne constituent, bien entendu, qu'une limite inférieure de l'espérance du nombre de pas requis.

4.2

Précision de l'estimation

La précision des résultats obtenus en appliquant la méthode de la marche au hasard est affectée par la même erreur systématique que la méthode des différences finies en ce qui concerne le pas δ du maillage. On sait que cette erreur varie avec le carré de δ (Scott, 1963). A cette erreur s'ajoute une imprécision de type statistique qui dépend du nombre n_T de trajectoires simulées. La variable aléatoire F_T (valeur de la fonction $F(Q)$ au point d'absorption de la trajectoire partant du nœud A_i) a pour espérance mathématique la charge hydraulique h_i au point A_i et sa variance $\sigma^2(F_T)$, généralement inconnue, dépend des conditions aux frontières et de la position du point A_i dans le domaine d'écoulement. La méthode de Monte Carlo donne un estimateur h_i^* de h_i qui est la moyenne d'un échantillon de valeurs de la variable aléatoire F_T . Quand l'échantillon atteint une taille n suffisante (quelques dizaines de trajectoires) le théorème de la limite centrale permet de conclure que h_i^* présente une densité de probabilité approxima-

tivement normale dont la moyenne est h_i et la variance $\sigma^2(F_T)/n$. On peut donc écrire :

$$P[|h_i - h_i^*| \leq Z_{\alpha/2} \sigma(F_T) / \sqrt{n_T}] = 1 - \alpha \quad (28)$$

où Z est la variable normale centrée réduite dont la fonction de répartition est présentée sous forme de tableau dans de nombreux traités de statistiques et α une probabilité choisie en fonction de la fiabilité du résultat recherché. On voit que :

a) L'erreur statistique est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de marches aléatoires simulées. La convergence de la méthode est donc extrêmement lente ;

b) Cette même erreur dépend de la variance de F_T et donc des conditions aux frontières et de la position du point étudié dans le domaine. La précision atteinte après un nombre donné de simulations varie donc d'un problème à un autre et d'un point à un autre du milieu.

Dans la pratique, la précision pourra être estimée au fur et à mesure de l'avancement des calculs en remplaçant dans l'équation (28) l'écart type $\sigma(F_T)$, inconnu, par son estimateur sans biais :

$$S = \sqrt{\frac{\sum (F_T - h_i^*)^2}{(n_T - 1)}} \quad (29)$$

On peut également estimer le nombre de marches au hasard nécessaires pour atteindre une précision donnée. Si on souhaite que l'erreur statistique relative soit inférieure à une certaine valeur w avec une probabilité $(1 - \alpha)$, le nombre minimal de trajectoires à simuler sera, d'après l'équation (28) :

$$n_T = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \sigma(F_T)}{w h_i^*} \right)^2 \quad (30)$$

• Application numérique

Si on considère le point P de la figure 10, la symétrie implique que les probabilités de sortie des trajectoires à gauche et à droite de la palplanche soient à peu près les mêmes, donc :

$$h(P) \equiv \frac{F_1}{2} \quad \sigma(F_T) \equiv \frac{F_1}{2} \quad (31)$$

où F_1 est la charge hydraulique côté amont.

Si on choisit $\alpha = 0,05$, alors $Z_{\alpha/2} = 1,96$ et l'équation (30) permet d'établir que l'on doit savoir :

$$n_T > \left(\frac{1,96}{w} \right)^2 \quad (32)$$

Cette équation, combinée avec les résultats exposés en 4.1, donne l'espérance du nombre total de pas n_s nécessaires pour obtenir la précision recherchée avec la probabilité d'erreur indiquée :

$$E(n_s) = 7,68 \frac{(k^2 - j^2)}{w^2} \quad (33)$$

A titre d'exemple, le nombre minimal de trajectoires à simuler pour $w = 1\%$ est, d'après l'inéquation (32), de 38 400. Le tableau I indique le nombre total de pas espérés correspondant à différents modules de maillage (ou de hauteurs du domaine d'écoulement) en supposant que, dans tous les cas, le point P occupe la même position relative par rapport aux frontières du domaine.

Les nombres de pas ainsi calculés sont élevés mais la vitesse de calcul des ordinateurs faisant des progrès constants, il n'y a plus vraiment là un obstacle à l'application de la méthode comme cela était encore le cas il y a une ou deux décennies. Le plus souvent, il conviendra malgré tout d'adopter les logiciels disponibles à chaque problème particulier et de les optimiser afin de réduire la durée de chaque pas et d'accélérer la résolution. On voit, par ailleurs, que le choix de la relation entre le pas du maillage et les dimensions des couches des matériaux perméables a une grande influence sur le temps de calcul.

TABEAU I

k	j	$E(n_s)$
5	1	1 843 200
10	2	7 372 800
15	3	16 588 800
25	5	46 080 000
50	10	184 320 000

4.3

Réduction de variance

Il existe certaines techniques qui permettent de réduire la variance de l'estimateur donné par la

méthode de Monte Carlo et donc d'accélérer sa convergence. La plus connue est sans doute celle de l'échantillonnage d'importance (Curtiss, 1949). On peut appliquer cette technique si l'on dispose d'une estimation h_i^e de la charge hydraulique aux nœuds i du maillage, obtenue par exemple par la méthode graphique. Dans le cas bidimensionnel, les probabilités de transition d'un nœud aux quatre nœuds voisins ont alors prises égales à :

$$\begin{aligned} P'[AA_1] &= \frac{P[AA_1]h_1^e}{\sum_1^4 P[AA_i]h_i^e} & P'[AA_2] &= \frac{P[AA_2]h_2^e}{\sum_1^4 P[AA_i]h_i^e} \\ P'[AA_3] &= \frac{P[AA_3]h_3^e}{\sum_1^4 P[AA_i]h_i^e} & P'[AA_4] &= \frac{P[AA_4]h_4^e}{\sum_1^4 P[AA_i]h_i^e} \end{aligned} \quad (34)$$

On définit ainsi les éléments m_{ij}^e d'une nouvelle matrice de transition (M^e), et on simule des marches au hasard allant du nœud étudié jusqu'aux frontières absorbantes en passant par une série de nœuds intermédiaires :

$$S_T = (A_0, A_1, \dots, A_k) \quad (35)$$

Pour chaque trajectoire, on calcule la valeur de la variable suivante :

$$\Phi_T = F_T \frac{m_{0,1} \dots m_{k-1,k}}{m_{0,1}^e \dots m_{k-1,k}^e} \quad (36)$$

où F_T est la valeur de la fonction $F(Q)$ au nœud i_k et les m_{ij}^e sont les éléments de la matrice de transition originale $[M]$. L'espérance mathématique de Φ_T est :

$$\begin{aligned} E(\Phi_T) &= \sum_T P[T] \Phi_T = \sum_T m_{0,1}^e \dots m_{k-1,k}^e \Phi_T \\ &= \sum_T m_{0,1} \dots m_{k-1,k} F_T = E(F_T) \end{aligned} \quad (37)$$

L'espérance de Φ_T coïncide avec celle de F_T . La charge hydraulique au nœud A_0 peut donc être calculée en prenant la moyenne des valeurs de Φ_T obtenues par simulation d'un certain nombre de marches au hasard. Si l'estimation préalable de la charge hydraulique aux nœuds du maillage est suffisamment précise, la variance de ce nouvel estimateur, $\sigma^2(\Phi_T)/n$, est inférieure à $\sigma^2(F_T)/n$. Elle tend d'ailleurs vers zéro si l'estimation préalable coïncide avec la solution exacte. On vérifie en effet facilement que, dans ce dernier cas, toute trajectoire conduit à une valeur de Φ_T qui est égale à la valeur réelle de la charge hydraulique au point de départ. Pour introduire une estimation suffisamment précise permettant de réduire la variance de façon significative, il faut, toutefois, en général, définir un maillage de façon explicite et avoir recours à un procédé de résolution annexe, graphique ou autre, pour obtenir une première estimation. Ceci demande un long travail de préparation qui enlève beaucoup de son intérêt à la méthode. Dans certaines situations, il peut néanmoins être intéressant de résoudre le problème

bidimensionnel par une méthode classique (par exemple par la méthode des éléments finis) et d'utiliser l'approximation ainsi obtenue pour atteindre plus rapidement la solution du problème tridimensionnel par la méthode de Monte Carlo.

5

Conclusions

La méthode de Monte Carlo permet de résoudre les problèmes d'écoulements permanents en milieux poreux. Sa convergence extrêmement lente la rend peu attrayante pour les problèmes courants. Il est bien sûr possible d'avoir recours à des procédés permettant de réduire la variance de l'estimateur du potentiel hydraulique mais seulement au prix d'un travail assez lourd de préparation des calculs. Par contre, cette technique

devient intéressante pour les problèmes tridimensionnels à géométrie complexe. Dans ce cas, elle conserve toute sa simplicité, et le temps de calcul n'augmente que faiblement par rapport aux problèmes bidimensionnels. Pour l'ingénieur confronté à des problèmes particuliers, par exemple celui de la détermination de gradients potentiellement critiques en certains points d'un domaine d'écoulement tridimensionnel irrégulière, elle constitue un outil qui peut être d'une grande utilité.

Remerciements

L'auteur souhaite remercier Mlle Farimah Masrouri, maître de conférences à l'ENSG, pour la révision critique de cet article et pour son assistance dans le développement des logiciels décrits dans le texte.

Bibliographie

Auvinet G. – *Técnicas de Monte Carlo*, in Presas de Tierra y Enrocamiento, édité par R.J. Marsal et D. Reséndiz, Mexico, Editorial Limusa, 1975, chap. 6, pp. 123-131.

Auvinet G. – MOCA2D et MOCA3D, Logiciels pour l'application de la méthode de Monte Carlo aux problèmes d'écoulements en milieux poreux. Notes du cours de modélisation stochastique, École Nationale Supérieure de Géologie, INPL, Nancy, 1994.

Curtiss J.H. – Sampling Methods Applied

to Differential and Difference Equations. Proc., IBM Scientific Computation Seminar, New York, 1949.

Hammersley J.M., Handscomb D.C. – Monte Carlo Methods. Methuen and Co. Ltd, London, 1965.

Harr M.E. – Stochastic approach to granular media, Powder and Grains, Proceedings, International Conference on Micromechanics of Granular Media, Clermont-Ferrand, Balkema, 1989, pp. 185-193.

Humbert P. – Application de la méthode

des éléments finis aux écoulements en milieux poreux, *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 132, juillet-août 1984.

Juarez B.E., Rico A. – Flujo de agua en suelos. Facultad de Ingeniería, UNAM, Mexico, 1969.

Parzen E. – Stochastic Processes, Holden Day Inc., San Francisco, USA, 1964.

Scott R.F. – Principles of Soil Mechanics. Addison Wesley Publications Co., Reading, Massachusetts, USA, 1963.