Deux applications de l'analyse factorielle à des données géotechniques

**P. POUGET
N. CADOUX***

Laboratoire régional
des ponts et chaussées
8-10, rue Bernard-Palissy
BP 11
63014 Clermont-Ferrand
* Stagiaire CUST-3° A

J.-P. MAGNAN

Laboratoire central
des ponts et chaussées
58, bd Lefebvre
75732 Paris Cedex 15

Résumé

La méthode d'analyse factorielle a été appliquée à l'analyse des données géotechniques provenant de deux sites : une zone de sols argileux compressibles où un grand nombre d'essais œdométriques a été réalisé dans un sondage et une zone de sols surconsolidés et peu déformables dans laquelle se trouve une vallée fossile remplie de sédiments argileux mous. Le premier site a été analysé pour trouver les relations existant entre les paramètres et définir les frontières des couches. Le second site a été analysé pour retrouver la géométrie de la vallée fossile à partir de mesures au pénétromètre statique. Ces deux exemples illustrent les possibilités de l'analyse factorielle, qui a fourni le résultat cherché dans les deux cas. Ils ont aussi mis en évidence quelques sources d'erreurs possibles.

Mots clés : analyse statistique, analyse factorielle, site compressible, vallée fossile, exemples.

Two applications of factor analysis to geotechnical data

Abstract

The factor analysis method has been applied to the analysis of geotechnical data from two sites : a zone of compressible clayey soils where a large number of oedometer compressibility tests were made and a zone of overconsolidated stiff soils where a hidden valley filled up with soft clayey sediments was found. The first site was analysed with the intention to find relationships between the soil parameters and to define the layer boundaries. The second site was analysed in order to find the geometry of the hidden valley from cone penetration tests. The two examples show the possibilities offered by factor analysis, which gave the intended results. They displayed possible sources of errors, too.

Key words : statistical analysis, factor analysis, compressible site, hidden valley, examples.

NDLE : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 1^{er} août 2001.

Introduction

Malgré les nombreux travaux qui leur ont été consacrés, les méthodes d'analyse de données restent pour les géotechniciens des outils mal connus et utilisés de façon très marginale, sous forme notamment de calculs statistiques élémentaires tels que les calculs de moyenne et de variance et les études de régression linéaire, où la statistique porte sur la variabilité des données autour d'une droite définie par la méthode des moindres carrés.

L'analyse factorielle, utilisée dès les années 1970 pour des applications de géotechnique (Favre, 1980), offre des possibilités complémentaires pour déterminer les relations existant à l'intérieur d'un ensemble de paramètres. Les deux études présentées dans cet article ont été réalisées sur deux sites où de très nombreuses données étaient disponibles :

- la première a été effectuée sur le site expérimental de Cubzac-les-Ponts (sols argileux compressibles), déjà analysé par Bagheri et Magnan (1983) par des méthodes d'analyse de corrélations et de régression linéaire. Il s'agissait de voir si l'utilisation de l'analyse factorielle, sous la forme de l'analyse en composantes principales, apportait des résultats différents des analyses déjà effectuées ;

- la seconde étude portait sur la recherche automatique d'ensembles de terrains homogènes dans la reconnaissance géotechnique d'un site. Cette seconde application a été réalisée sur les données d'une étude géotechnique exécutée quelques années plus tôt et qui avait mis en évidence l'existence d'une vallée fossile remplie de sols compressibles dans un environnement de sols surconsolidés et résistants.

Ces deux applications sont décrites successivement dans cet article, après un rappel succinct des principes de l'analyse factorielle de données.

La méthode d'analyse factorielle (rappels)

L'analyse factorielle cherche à représenter la variabilité d'un ensemble de n variables aléatoires $(X_i)_{i=1, n}$ par un plus petit nombre p d'autres variables $(Y_j)_{j=1, p}$ appelées catégories ou facteurs. Ce travail se fait à partir de m observations des variables X_i , soit $(x_{ik})_{i=1, n, k=1, m}$.

Pour atteindre cet objectif, on construit par étapes une suite de variables Y_j qui représentent chacune l'essentiel de la variabilité restante des données. Ce travail peut être représenté comme la recherche des axes principaux des m points observés dans l'espace à n dimensions d'axes $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pour $n = 3$, cette procédure est représentée sur la figure 1 :

- la première phase est la recherche de l'axe Y_1 , qui passe par le centre de gravité G des points et minimise la somme des carrés des distances des points (x_{ik}) à ce premier axe ;
- la deuxième phase est la recherche de l'axe principal d'inertie Y_2 dans le plan passant par G et perpendiculaire à l'axe Y_1 . La procédure est la même que pour Y_1 : on cherche l'orientation de l'axe Y_2 qui minimise la somme des carrés des distances des points au plan $Y_1 Y_2$;

– le troisième axe est perpendiculaire aux deux premiers.

Quand il existe plus de trois variables X_i , la procédure est la même avec un axe principal Y_1 et des axes successifs définis par minimisation par rapport à des hyperplans.

L'expression mathématique de la procédure de recherche des axes (Y_j) est décrite dans divers ouvrages (Bertier et Bourroche, 1977 ; Dagnelie, 1977 ; Lebart *et al.*, 1982). Elle est brièvement rappelée ci-après.

La relation cherchée entre les n variables (X_i) et les p variables (Y_j) peut s'écrire sous la forme générale :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{p1} & \dots & u_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

$$[Y] = [U] [X] + [\varepsilon]$$

où $[\varepsilon]$ est la matrice des résidus (écarts entre les valeurs réelles et les valeurs calculées) de la relation. La matrice $[U]$, pour sa part, est la matrice de passage du repère orthonormé des variables (X_i) au repère orthonormé des nouvelles variables (Y_j) . Cette matrice contient les coordonnées en ligne des vecteurs unitaires des axes (Y_j) par rapport à la base des vecteurs unitaires des axes (X_i) . Compte tenu de son origine, la matrice $[U]$ a les propriétés suivantes :

$$\sum_i u_{ji}^2 = 1 \quad (\text{vecteurs unitaires})$$

et

$$\sum_i u_{ji} u_{ki} = 0 \text{ pour } j \neq k \quad (\text{vecteurs orthogonaux par deux}).$$

Par conséquent la matrice $[U]$ est telle que $[U] [U]^t = [I]$ (matrice unité) et $[U]^t$ est l'inverse de $[U]$.

Les points P_k observés (m valeurs des (X_i) , soit (x_{ik})) ont pour coordonnées dans le nouveau repère des (Y_j) :

$$(y_{jk}) = (u_{ji}) (x_{ik}).$$

Dans ces matrices, les coordonnées (x_{ik}) des points P_k sont rangées en colonnes et les (y_{jk}) correspondants en lignes.

Si l'origine des axes est placée au centre de gravité G des points P_k , la distance entre le point G et la projection H_{k1} d'un point P_k sur l'axe portant la variable Y_1 (Fig. 2) vaut :

$$(y_{1k}) = (u_{1i}) (x_{ik}).$$

Le carré de cette distance est égal à :

$$|GH_{k1}|^2 = \{u_{1i}\} \{x_{ik}\} \{x_{ik}\}^t \{u_{1i}\}^t$$

$$= \sum_i u_{1i}^2 x_{ik}^2$$

La somme Σ^2 des carrés des distances GH_{k1} pour tous les points P_k est donnée par le produit de matrices

$$\Sigma^2 = (y_{1k}) (y_{1k})^t = (u_{1i}) (x_{ik}) (x_{ik})^t (u_{1i})^t.$$

FIG. 1 Procédure de recherche des axes principaux d'inertie.
Procedure for finding the principal inertia axes.

FIG. 2 Distance du point P_k à l'axe Y_1 .
Distance from point P_k to axis Y_1 .

La somme des carrés des distances des points P_k à l'axe GY_1 est égale à :

$$\sum_k H_{k1} P_k^2 = \sum_k G P_k^2 - \sum_k G H_{k1}^2$$

Comme $\sum_k G P_k^2$ est constant pour un ensemble de points P_k donné, minimiser $\sum_k H_{k1} P_k^2$ revient à maximiser $\sum_k G H_{k1}^2 = \Sigma^2$.

Pour maximiser Σ^2 par le choix optimal de l'axe GY_1 , on procède de la façon suivante.

On recherche le vecteur unitaire de GY_1 de composantes $\{u_i\}$ sur la base orthonormée des $\{X_i\}$ qui maximise le produit $\{u_i\} \{x_{ik}\} \{x_{ik}\}^t \{u_i\}^t$.

La matrice $\{A\} = \{x_{ik}\} \{x_{ik}\}^t$ est symétrique et définie positive, donc diagonalisable, avec des valeurs propres positives. Soit $\{B\}$ la matrice des coordonnées en colonnes des vecteurs propres unitaires de $\{A\}$ dans le repère des $\{X_i\}$ et $\{\Lambda\}$ la matrice de ses valeurs propres :

$$\{B\} = [b_{\alpha i}] \quad \{\Lambda\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

On peut écrire :

$$\{A\} \{B\} = \{B\} \{\Lambda\}$$

d'où :

$$\{A\} = \{B\} \{\Lambda\} \{B\}^t \text{ car } \{B\} \{B\}^t = \{1\}.$$

Si l'on écrit les coordonnées des vecteurs propres unitaires $\{b_{\alpha i}\}$ dans leur repère (qui est celui des Y_j cherchés), on obtient une nouvelle matrice :

$$\{C\} = [c_{\alpha j}] = \{B\}^t \{U\},$$

et l'on peut écrire que

$$\{U\} \{X\} \{X\}^t \{U\}^t = \{U\} \{B\} \{\Lambda\} \{B\}^t \{U\}^t = \{C\}^t \{\Lambda\} \{C\}.$$

La condition $\{U\}^t \{U\} = \{1\}$ devient alors

$$\{C\}^t \{C\} = \{U\} \{B\} \{B\}^t \{U\}^t = \{U\} \{U\}^t = \{1\}.$$

La maximisation de $\{U\} \{X\} \{X\}^t \{U\}^t$ pour la première direction propre correspond donc à celle de l'expression :

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha 1}^2$$

sous la condition $\sum_\alpha c_{\alpha 1}^2 = 1$.

En effet, les $c_{\alpha 1}$ sont les coordonnées des vecteurs propres unitaires sur la première direction propre. On peut remplir les conditions imposées en choisissant la direction propre associée à la plus grande valeur propre λ_1 . On a ainsi déterminé l'orientation du premier facteur Y_1 .

La procédure se continue en utilisant successivement les valeurs propres et directions propres dans l'ordre décroissant des valeurs propres.

Si l'on détermine également les valeurs propres μ_α de la matrice $X'X$ et les vecteurs propres unitaires v_α , correspondants, on démontre que :

$$\lambda_\alpha = \mu_\alpha$$

$$X v_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} u_\alpha$$

d'où

$$X = \sum_{\alpha=1}^{p} \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha u_\alpha^t$$

Le taux d'inertie ou part de variance expliquée

$$\tau_p = \sum_{\alpha=1}^p \lambda_\alpha / \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha$$

permet d'apprécier la qualité de la représentation des X_i par les Y_j .

3

Applications, généralités

Les analyses en composantes principales présentées dans cet article ont été réalisées au moyen du logiciel STATGRAPHICS. Le calcul fournit :

- un vecteur contenant les valeurs propres, qui expriment la variance de chaque composante principale ;
- une matrice contenant les vecteurs propres, qui sont les pondérations à appliquer aux variables pour obtenir les facteurs ;
- une matrice contenant les corrélations entre les variables de départ et les facteurs (utile à l'interprétation des facteurs).

La projection des individus et des caractères est réalisée sur l'espace principal considéré. En général, comme nous avons pu le vérifier, le plan défini par les deux premiers axes factoriels comprend un pourcentage important de l'information.

L'interprétation des résultats et de leurs représentations graphiques conduit aux informations suivantes :

- l'origine des axes G est le centre de gravité du nuage ; il représente la tendance moyenne des individus. Les individus situés loin du centre présentent un écart important par rapport à cette moyenne et influencent beaucoup les statistiques ;
- l'inertie d'un axe, représentée par la valeur propre associée à son vecteur directeur, témoigne de la représentativité de cet axe par rapport au nuage des points : plus l'inertie du plan est forte, plus la projection du nuage sur ce plan est réaliste avec un minimum de perte d'information ;
- les coordonnées des points sur les axes factoriels sont les coefficients de corrélation des individus qu'ils représentent avec ces axes. La valeur du produit scalaire des vecteurs joignant deux points à l'origine est le coefficient de corrélation entre les deux variables correspondantes : des vecteurs voisins indiquent des variables fortement corrélées ;
- la proximité, dans le plan, d'individus et de variables n'a pas de signification. Un lien entre ces paramètres nécessite une interprétation de la signification des facteurs.

4

Analyse de la compressibilité de l'argile molle de Cubzac

Lors de l'étude géotechnique des sols du site expérimental des Laboratoires des Ponts et Chaussées à Cubzac-les-Ponts, un sondage carotté de 20 cm de diamètre et 9 m de longueur a été entièrement consacré à l'étude des variations des résultats des essais œdométriques en fonction de la profondeur (Sondage A44, Remblai D, Haghgou, 1983) : on dispose ainsi de 168 résultats d'essais œdométriques, à raison de deux essais au même niveau tous les 6,5 cm de profondeur, avec des interruptions périodiques dues au carottage (remaniement des extrémités des carottes).

L'étude générale du site a montré que la coupe des sols dans la zone du sondage A44 est la suivante :

- de 0 à 1,3 m, couche superficielle d'argile molle surconsolidée, correspondant aux fluctuations annuelles de la nappe phréatique ;
- de 1,3 à 2,5 m, vase limono-argileuse moyennement organique, très compressible et légèrement surconsolidée ;
- de 2,5 à 9 m, vase argilo-limoneuse faiblement organique, très compressible et légèrement surconsolidée, plus dense de 2,5 à 5,2 m ($w = 65\%$, $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$) que de 5,2 à 9 m ($w = 80\%$, $\gamma = 14,8 \text{ kN/m}^3$).

Les données géotechniques du site expérimental de Cubzac-les-Ponts ont été analysées par Bagheri et Magnan (1983) et par Haghgou (1983), en utilisant les méthodes classiques de la statistique et notamment l'analyse de régression linéaire. L'étude présentée ici cherchait à savoir si l'analyse factorielle pouvait apporter des informations complémentaires par rapport à l'analyse de régression linéaire.

Le travail d'analyse en composantes principales a été effectué sur un tableau comportant 168 lignes et 13 colonnes :

- colonne 1 : i , numéro de l'éprouvette ;
- colonne 2 : z , profondeur (m) ;
- colonne 3 : w , teneur en eau naturelle (%) ;
- colonne 4 : γ , poids volumique (kN/m^3) ;
- colonne 5 : γ_d , poids volumique du sol sec (kN/m^3) ;
- colonne 6 : e_v , indice des vides en place ;
- colonne 7 : C_v , indice de gonflement ;
- colonne 8 : C_c , indice de compression ;
- colonne 9 : σ'_p , pression de préconsolidation (kPa) ;
- colonne 10 : c_v , coefficient de consolidation verticale (m^2/s) ;
- colonne 11 : k_v , coefficient de perméabilité verticale (m/s) ;
- colonne 12 : e_k , paramètre de la relation entre e et k_v ($e = e_k + C_k \lg k_v$) ;
- colonne 13 : C_k , paramètre de la relation entre e et k_v .

L'analyse en composantes principales réalisée sur l'ensemble des données a montré que les deux premiers axes factoriels représentaient toujours de 70 à 100 % de l'information initiale. L'exposé des résultats sera pour cette raison limité à ces deux axes.

4.1

Analyse au niveau des paramètres

L'analyse réalisée sur l'ensemble des mesures entre 1,085 m et 9,075 m de profondeur montre un plan factoriel (Fig. 3) dont l'inertie totale est de 72,6 % (59,5 % pour le premier axe, 13,1 % pour le deuxième). Sur ce plan sont représentés simultanément les points correspondant aux individus et les vecteurs correspondant aux variables. Quatre groupes de vecteurs rapprochés les uns des autres peuvent être observés. Ils sont associés respectivement aux variables suivantes :

- γ et γ_d ;
- w , e_v , C_v , e_k et C_k ;
- c_v et k_v ;
- z et σ'_p .

FIG. 3 Plan factoriel 1-2 de l'analyse en composantes principales (ensemble des données).
Plot of factors 1 and 2 from factor analysis (all data).

Le rapprochement des vecteurs ou leur opposition montrent des relations marquées entre les paramètres, correspondant à des corrélations positives dans le cas de deux vecteurs proches l'un de l'autre et à des corrélations négatives en cas de vecteurs opposés.

Dans les quatre groupes ainsi définis, on retrouve des paramètres présentant des relations bien connues, comme par exemple, pour les vecteurs proches, γ et γ_d , avec la relation :

$$\gamma = \gamma_d (1 + w)$$

qui fait intervenir w , dont le vecteur représentatif est pratiquement opposé à celui de γ_d .

Pour d'autres paramètres, la relation paraît simplement logique : ainsi, l'indice de compression C_c matérialise la « capacité du sol à être comprimé », qui augmente avec l'indice des vides e_0 . L'indice des vides varie comme la teneur en eau, et en sens inverse du poids volumique...

Les informations tirées de l'analyse en composantes principales doivent tenir compte des connaissances en mécanique des sols dans la manière de s'intéresser à certains paramètres. Ainsi, on peut observer que les variables w et e_0 sont symétriques des variables γ et γ_d avec une représentativité de l'axe principal de 92,7 % (Fig. 4). Ces résultats vont dans le sens des corrélations existant entre ces paramètres (tableau I).

L'interprétation de la position des vecteurs représentant les variables dans les plans factoriels permet donc de mettre en évidence des relations entre les caractéristiques géotechniques, qui découlent de la formulation des propriétés des sols ou de phénomènes liés à leur formation. Toutefois, pour des types de sols aussi bien étudiés que les argiles molles, cette analyse ne fait que retrouver des relations et corrélations bien connues en mécanique des sols.

FIG. 4 Plan factoriel 1-2 de l'analyse en composantes principales des paramètres w , e_0 , γ , γ_d .
Plot of factors 1 and 2 from factor analysis (w , e_0 , γ , γ_d).

TABEAU I Coefficients de corrélation linéaire entre les paramètres w , e_o , γ et γ_d .
Correlation coefficients of soil parameters w , e_o , γ et γ_d .

	w	e_o	γ	γ_d
w	1	0,95	-0,90	-0,96
e_o		1	-0,76	-0,86
γ			1	0,97
γ_d				1

4.2

Analyse au niveau des individus

La représentation graphique de l'analyse en composantes principales peut être complétée par la numérotation des différents individus analysés. On peut ainsi définir des groupes représentant des individus proches les uns des autres. La détermination de ces groupes se fait « à la main » sur le graphique et la question de la séparation des zones reste généralement marginale (quelques points des zones de transition peuvent prêter à ambiguïté). La figure 5 montre le plan factoriel de l'ensemble des données. La numérotation des individus permet de définir quatre groupes d'individus, qui correspondent à des couches superposées :

- couche 1 (point 1 à 7) : de 1,085 à 1,255 m ;
- couche 2 (points 15 à 25) : de 1,76 à 2,37 m ;
- couche 3 (points 33 à 84) : de 2,63 à 5,015 m ;

- couche 4 (points 85 à 168) : de 5,28 à 9,075 m.

On note le nombre relativement faible des points non comptabilisés dans la définition de ces couches : l'imprécision correspondante de la délimitation des couches est de l'ordre de 30 cm.

L'analyse réalisée sur des plans factoriels limités à certains paramètres conduit à la définition de groupes d'amplitudes très proches de celles obtenues au niveau de l'ensemble des données. A titre d'exemple, le plan factoriel de l'analyse en composantes principales utilisant les paramètres w , e_o , γ , γ_d (Fig. 6) montre une répartition des points différente de celle obtenue sur la figure 4 mais l'ordre et l'épaisseur des couches qui en résultent sont pratiquement identiques. On note que le plan factoriel obtenu dans ce cas possède une inertie de 99,4 %, ce qui est dû au fait que, pour un sol saturé, il n'y a que deux paramètres indépendants parmi les quatre : en effet, il existe deux relations entre w , e_o , γ , γ_d :

$$\gamma = \gamma_d (1 + w)$$

$$e_o = \frac{\gamma - \gamma_d}{\gamma_w + \gamma_d - \gamma}$$

La figure 7 montre le plan factoriel 1-2 obtenu pour une autre combinaison de variables : z , w , C_u et σ'_p . Cette fois encore la disposition des points sur le graphique est différente, mais les couches obtenues sont les mêmes que dans les autres diagrammes.

Comme l'indique le tableau II, la prise en compte de tout ou partie des paramètres mesurés conduit à définir quatre couches de sol quasiment identiques à quelques centimètres près, c'est-à-dire à un ou deux niveaux de mesure près. Ces couches sont très proches de celles définies par la coupe géologique du sondage.

FIG. 5 Plan factoriel 1-2 de l'analyse en composantes principales avec l'ensemble des paramètres, pour identification des individus.
Plot of factors 1 and 2 from factor analysis, including all soil parameters, for analysis at the level of individuals.

FIG. 6 Plan factoriel 1-2 de l'analyse en composantes principales avec les paramètres w , e , γ et γ_d .
Plot of factors 1 and 2 from factor analysis (soil parameters w , e , γ and γ_d).

FIG. 7 Plan factoriel 1-2 de l'analyse en composantes principales avec les paramètres z , w , C_c et σ'_p .
Plot of factors 1 and 2 from factor analysis (soil parameters z , w , C_c and σ'_p).

On observe dans le tableau III que la représentativité des deux premiers axes factoriels est d'autant meilleure que le nombre de variables indépendantes (non liées par une relation mathématique) est faible. Les exceptions correspondent à des groupes de paramètres fortement corrélés (indice de compression et indice des vides, par exemple).

On remarque que, si l'analyse en composantes principales peut être utilisée pour déterminer les différentes couches de sol, elle ne permet pas de leur attribuer des

caractéristiques géotechniques. Une étude statistique au niveau de chaque couche doit donc compléter les résultats. Cette étude statistique, menée sur l'ensemble des paramètres de chacune des couches mises en évidence, montre des coefficients de variation des paramètres par couche légèrement inférieurs ou en tout cas du même ordre de grandeur que ceux mesurés sur l'ensemble des paramètres (une seule couche). A titre d'exemple, le tableau III donne les valeurs relatives au poids volumique γ du sol.

TABLEAU II

Zones déterminées par différentes analyses en composantes principales.
Zones of similar soils (layers) obtained from various factor analyses.

Variables intégrées dans l'analyse													Variables non liées	Inertie du plan factoriel 1-2	Définition des couches			
z	w	γ	γ _d	e _o	C _s	C _c	σ _p	c _v	k _v	e _k	C _k	Zone 1 (m)			Zone 2 (m)	Zone 3 (m)	Zone 4 (m)	
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	8	72,16 %	1,085 à 1,255	1,76 à 2,37	2,63 à 5,015	5,28 à 9,075	
	x	x	x	x								2	99,4 %	1,085 à 1,255	1,76 à 2,435	2,63 à 5,34	5,40 à 9,075	
	x	x	x	x	x	x						4	93,8 %	1,085 à 1,385	1,76 à 2,435	2,63 à 5,015	5,28 à 9,075	
x	x					x	x					4	80,8 %	1,085 à 1,385	1,76 à 2,435	2,50 à 5,015	5,28 à 9,075	
x						x	x					3	82,2 %	1,085 à 1,385	1,76 à 2,435	2,50 à 5,015	5,28 à 9,075	
	x					x	x					3	98,3 %	1,085 à 1,385	1,76 à 2,37	2,435 à 5,34	5,40 à 9,075	
						x	x	x	x	x	x	6	73,4 %	1,085 à 1,385	1,76 à 2,435	2,50 à 5,015	5,28 à 9,075	
x	x			x				x	x	x	x	6	79,3 %	1,085 à 1,255	1,76 à 2,37	2,50 à 5,28	5,34 à 9,075	

TABLEAU III

Coefficients de variation du poids volumique par couche et global.

Coefficients of variation of unit weight for each layer and for the entire ground.

Couche	Coefficient de variation
1	6,64 %
2	2,82 %
3	3,25 %
4	2,25 %
Tout le sol	5,65 %

5

Application au zonage géotechnique

5.1

Introduction

Dans le cadre de l'étude géotechnique du site destiné à la construction d'un parking pour avions dans un aéroport, un grand nombre de sondages au pénétromètre statique a été réalisé dans une zone d'environ 1 km de longueur et 0,6 km de largeur (Fig. 8).

L'étude géotechnique a montré qu'il existe sur ce site une vallée fossile remplie de sédiments de faible résistance (sables et argiles) et dont la profondeur dépasse 20 m. La position de la vallée a été déduite de l'analyse manuelle des courbes de variation de la résistance de cône q_c en fonction de la profondeur. Les sols peu résistants ont été définis comme ayant une résis-

FIG. 8 Disposition des sondages pénétrométriques sur le site du projet.
Layout of the penetration tests (CPT) at the construction site.

tance de cône inférieure à 2 MPa. La vallée est représentée sur la figure 9.

Les formations rencontrées à partir de la surface du sol sont successivement :

- de la terre végétale ou du remblai sur une épaisseur de 0,3 à 1,5 mètre ;
- de l'argile grise dont l'épaisseur peut atteindre 22 mètres. On peut rencontrer dans cette formation des argiles vasardes d'épaisseur variable ;
- de l'argile jaunâtre très consistante à dure, qui constitue le substratum pour le projet étudié.

La couche d'argile grise est absente au dehors de la vallée et a une épaisseur croissante quand on passe du bord au centre de la vallée. Des intercalations de sables et graviers sont rencontrées assez rarement jusqu'à une profondeur de 16 mètres ; elles sont plus nombreuses entre 16 et 22 mètres de profondeur. Ces couches ont une épaisseur et une extension latérale très irrégulières.

FIG. 9 Position de la vallée fossile sur le site étudié.
Location of the hidden valley across the site.

La configuration de ce site a paru favorable pour essayer de délimiter l'étendue de la vallée fossile par une technique automatique d'analyse de données, en appliquant les outils de l'analyse factorielle.

A cette fin, comme cela avait été fait dans l'analyse manuelle, les pénétrogrammes (variations de la résistance de cône q_c et du frottement latéral f_s en fonction de la profondeur) ont été simplifiés pour être enregistrés dans un tableau informatique. Les quatre-vingt-douze sondages ont été enregistrés à raison d'une valeur moyenne de q_c et f_s tous les 50 cm. La figure 10 montre le pénétrogramme du sondage 25.

Le tableau de données comprend aussi cinq autres paramètres :

FIG. 10 Pénétrogramme du sondage 25.
Penetrogramme of CPT sounding Nr. 25.

- le numéro de l'enregistrement (les valeurs sont enregistrées dans l'ordre des profondeurs croissantes et par ordre croissant des numéros des sondages) ;
- le numéro du sondage ;
- l'abscisse du point de sondage dans le repère choisi ;
- l'ordonnée du point de sondage ;
- la profondeur de la mesure.

5.2

Étude dans la direction verticale

Chaque sondage a d'abord été analysé séparément. Dans chacun des plans factoriels ainsi élaborés (où chaque individu apparaît par sa numérotation croissante avec la profondeur), on observe des zones où ces individus sont proches les uns des autres : les familles ainsi constituées définissent des couches. Un exemple de résultat (sondage 25) est donné sur la figure 11, où l'on peut observer l'existence de quatre couches.

FIG. 11 Biplot factoriel de l'analyse en composantes principales des données du sondage 25 (axes d'inertie 1 et 2). Mesures 672 à 709.
Plot of the first factors of data from CPT sounding Nr. 25 (inertia axes 1 and 2). Data 672 to 709.

Trois à sept (quatre à cinq le plus souvent) zones ou couches ont ainsi été déterminées par sondage. Chacune a fait l'objet d'une analyse statistique avec calcul de la moyenne, de la variance et du coefficient de variation des variables q_c et f_s . On observe une très nette diminution du coefficient de variation par rapport au coefficient de variation mesuré sur toute la hauteur du sondage (tableau IV), ce qui confirme l'homogénéité des couches ainsi définies. On constate toutefois que ce phénomène est moins net dans les couches inférieures des sondages, où des intercalations de bancs de sable se font sentir.

TABLEAU IV

Quelques résultats statistiques obtenus sur les couches déduites de l'analyse en composantes principales.
Some statistical properties of the CPT characteristics of each of the layers obtained from factor analysis.

Sondage	Zone	Numéros des individus	Profondeur z(m)	q_c moyenne (MPa)	$q_c \sigma^2$ (MPa ²)	q_c CV (%)	f_s moyenne (kPa)	$f_s \sigma^2$ (kPa ²)	f_s CV (%)
30	1	809 à 811	1 à 2	2,53	0,173	16,4	120	100	8,3
	2	812 à 823	2,5 à 8	1	0,075	27,3	37	300	49,8
	3	824 à 841	8,5 à 17	1,22	0,153	31,9	54	700	49,7
	4	842 à 846	17,5 à 19,5	4,34	7,448	62,9	220	24 800	71,6
	Global	809 à 846		1,88	3,855	104,6	86	10 800	120,7
65	1	2013 à 2017	0,5 à 2,5	2,9	0,755	30	192	6 600	42,4
	2	2018 à 2025	3 à 6,5	0,93	0,054	25	34	100	22
	3	2026 à 2032	7 à 10	2,5	0,273	20,9	161	800	17,3
	4	2033 à 2044	10,5 à 16	2,08	0,68	39,7	102	1 600	39,8
	5	2045 à 2052	16,5 à 20	7,35	7,003	36	346	8 000	25,9
	Global	2013 à 2052		3,08	6,646	83,8	159	14 300	75,3

5.3

Étude dans un plan horizontal

La technique d'analyse en composantes principales a été utilisée pour analyser les résultats des essais pénétrométriques dans des plans horizontaux choisis à différentes profondeurs (le fichier de données a été conçu de manière à comporter l'altitude de chaque niveau de mesure). Pour les sondages dont la longueur est inférieure à 20 mètres, les données ont été complétées jusqu'à cette profondeur par une valeur correspondant à la dernière valeur mesurée (ce sont des sondages dans des argiles raides ne posant pas de problèmes géotechniques).

L'analyse a été réalisée sur la résistance de cône q_c (qui est *a priori* le paramètre mesuré le plus représentatif pour les sols compressibles) et a consisté à établir des cartes de courbes isométriques de ce paramètre suivant la profondeur. L'intérêt de l'analyse en composantes principales est qu'elle permet des représentations factorielles où l'on peut analyser des ressemblances entre individus et les classer. Dans le cas présent, on analyse seulement deux variables q_c et f_s et toute la variabilité est représentée dans le plan factoriel 1-2. Le travail se décompose comme suit :

- à une profondeur donnée, traçage du plan factoriel calculé à l'aide des paramètres mesurés. Décomposition du plan en dix zones ou classes d'appartenance ;
- sortie du même plan factoriel en faisant apparaître cette fois le numéro de la mesure. Par comparaison avec la figure précédente, on sait alors à quelle classe appartient chaque sondage ;
- traçage, sur le plan de situation des sondages, des courbes correspondant aux limites de classes. Ce traçage s'effectue « à la main » avec interpolation entre les points du graphe. Des formes de couches insolites ont parfois été trouvées par cette démarche (liées à l'imprécision du système, d'une part, et à la présence de

niveaux de sables et graviers, d'autre part), mais, globalement, les indéterminations ont été très réduites et les cartes ainsi obtenues prêtent peu à discussions.

On dispose ainsi d'une carte pour chacune des profondeurs prises en compte, soit tous les 2,5 mètres. Les figures 12 et 13 montrent les courbes isométriques obtenues aux profondeurs de 10 et 20 mètres (la profondeur est donnée par rapport à l'altitude de référence, qui est celle de l'extrémité supérieure du sondage le plus élevé). L'analyse des courbes permet de préciser la situation et la forme de la vallée fossile ; elle donne une information sur la forme du fond de celle-ci (forme se rapprochant du V plutôt que du U).

La figure 14 compare la géométrie de la vallée à 20 m de profondeur (zone de résistances de cône q_c inférieures à 2 MPa) dans l'analyse qui vient d'être présentée et dans l'analyse manuelle effectuée lors de l'étude du site. On observe que la concordance est

FIG. 13 Courbes isométriques de résistance de cône à la profondeur de 20 m.
Lines of equal cone resistance q_c at 20 m depth.

FIG. 14 Comparaison des formes de la vallée à 20 m de profondeur.
Comparison of the shapes of the valley at 20 m depth.

assez bonne. La principale différence est située au centre de la figure où la vallée est tracée de part et d'autre de deux sondages dans les deux analyses, ce qui est possible si l'on limite l'analyse à ce seul niveau.

La figure 15 compare les vallées à la profondeur de 10 m. Cette fois encore on retrouve une allure compa-

FIG. 15 Comparaison des formes de la vallée à 10 m de profondeur.
Comparison of the shapes of the valley at 10 m depth.

table des zones de résistance de cône faibles ($q_c < 2$ MPa), avec des divergences d'appréciation sur quelques sondages.

Ces différences proviennent principalement des choix faits dans l'analyse manuelle globale, où la contrainte d'un rétrécissement progressif de la vallée en profondeur a conduit à éliminer des valeurs localement plus fortes des q_c , afin d'obtenir un résultat logique. Les analyses par niveau, quand elles ne sont pas corrigées par une analyse « tridimensionnelle » tenant compte des règles de la géomorphologie, peuvent en effet donner des résultats incohérents, comme on le voit dans ce cas sur la figure 16.

FIG. 16 Comparaison des résultats des analyses par plans horizontaux.
Comparison of the results of the analyses made on horizontal planes.

6

Conclusion

Les deux applications de l'analyse factorielle (analyse en composantes principales) présentées dans cet article ont montré que cette technique d'analyse de données peut être appliquée avec succès à des données géotechniques. Pour l'étude des propriétés déduites d'une série importante d'essais œdométriques réalisés dans le même sondage, les relations connues pour le comportement des argiles ont été retrouvées, mais sans qu'apparaissent des idées de relations nouvelles. Pour la recherche d'une ancienne vallée remblayée de sédiments plus compressibles dans une zone de sols plus raides, la démarche de l'analyse factorielle a permis de donner un caractère plus systématique à la recherche des frontières de cette vallée, mais elle doit être contrôlée pour assurer la cohérence du modèle du site et complétée pour déterminer les propriétés représentatives des différents sols identifiés. Le bilan de ces études exploratoires est donc satisfaisant pour la mise en œuvre et le bon fonctionnement du système d'analyse, qui utilise un logiciel spécialisé accessible à tous les utilisateurs. Mais les conclusions tirées des résultats bruts de l'analyse factorielle doivent être soigneusement pesées et confrontées aux connaissances disponibles pour éviter des interprétations erronées.

- Baghery S., Magnan J.-P. (1983) – « Analyse probabiliste de la stabilité et des tassements des remblais du site expérimental de Cubzac-les-Ponts », Paris, Laboratoire central des ponts et chaussées, Rapport de recherche LPC, n° 122, 71 p.
- Bertier P., Bouroche J.-M. (1977) – *Analyse de données multidimensionnelles*. Presses universitaires de France, 2^e éd.
- Boulefkhad T. (1986) – « Influence de la variabilité des propriétés des sols sur le calcul des tassements des fondations superficielles ». Thèse de docteur ingénieur en génie civil présentée à l'université de Clermont II UFR de Recherche scientifique et technique.
- Dagnelle P. (1977) – *Analyse statistique à plusieurs variables*. Presses agronomiques de Gembloux, diffusion Vander-Oyez réédition.
- Favre J.-L. (1980) – « Milieu continu et milieu discontinu : mesure statistique indirecte des paramètres rhéologiques et approche probabiliste de la sécurité ». Thèse de doctorat d'État en sciences physiques, université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.
- Haghighi M. (1983) – « Étude du comportement d'un remblai expérimental sur sol compressible ». Thèse de docteur ingénieur présentée à l'université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI.
- Lebart L., Morineau A., Fenelon J.-P. (1982) – *Traitement des données statistiques. Méthodes et programmes*. Paris, Dunod, 516 p.