

Simulation numérique 3D du frottement sol-inclusion en chambre d'étalonnage par équations intégrales aux frontières

M. BOULON

Laboratoire 3S
Université Joseph-Fourier
BP 53,
38041 Grenoble Cedex 9

P. GARNICA

Instituto Mexicano
del Transporte
Apartado Postal 1098,
76000 Querétaro,
Qro., Mexique

M. EISSAUTIER

Société Simecsol
8, avenue Newton,
92350 Le Plessis-Robinson

Résumé

Les auteurs proposent un modèle d'interaction sol-structure en tant que problème de contact non linéaire entre le sol et l'inclusion, avec une interface résultant du contraste entre les propriétés mécaniques de ces solides. Le traitement numérique est effectué à travers la méthode des équations intégrales aux frontières, et la loi de frottement est un modèle incrémentalement non linéaire entre les vecteurs vitesse de contrainte et vitesse de déplacement relatif à l'interface. Des applications à la simulation numérique d'essais d'arrachement de pieux en chambre d'étalonnage sont présentées.

Numerical 3D modelling of soil-inclusion friction in a calibration chamber by the BEM

Abstract

It is shown how the soil-structure interaction problem can be considered as a non-linear contact problem between elastic solids. The boundary element method is used for the numerical treatment and the non-linearities at the interface are modeled by means of an incrementally non linear interface law. Numerical simulations of pile pull-out tests in calibration chamber are presented and discussed.

Introduction

L'importance des problèmes d'interaction sol-structure dans le domaine du génie civil, pour les structures off-shore notamment, a conduit au développement d'essais *in situ*, sur modèle réduit ou en centrifugeuse, portant notamment sur la mesure du frottement mobilisé le long de pieux.

S'agissant de problèmes de pieux ou autres inclusions dans le sol, il convient de simuler le comportement de l'ensemble des solides, et donc de considérer le problème aux limites faisant intervenir l'inclusion, le sol et le contact sol-inclusion. L'interaction sol-structure peut donc entrer dans la catégorie très vaste des problèmes de contact entre solides, avec une interface non linéaire induite par le contraste de propriétés mécaniques entre les matériaux constituant les milieux en contact.

Toutes les expériences de visualisation du frottement latéral, pour des ancrages moulés ou pour des pieux battus, indiquent que les grands déplacements du sol sont localisés dans une zone de très faible épaisseur au contact de l'inclusion (Foray [10]). Cette localisation le long de l'inclusion montre qu'on est beaucoup plus proche d'un mécanisme du type cisaillement direct sable-plaque rugueuse que de celui d'un cisaillement simple.

On retrouve les mêmes observations dans les expériences d'interface effectuées par Plytas [16], puis par Hoteit [12] sur le contact sol-structure : les grains subissent de très grands déplacements et de grandes rotations dans une zone dont l'épaisseur correspond à environ une dizaine de grains moyens. Ces mécanismes doivent nécessairement être intégrés à tout modèle numérique si l'on veut obtenir des résultats de simulation réalistes.

La première partie de cet article est dédiée à la mise en équations du problème de contact avec frottement. La deuxième partie décrit brièvement un modèle d'interface sol-structure de type vectoriel et à dépendance directionnelle. Ce modèle, dont les bases ont été établies par Boulon et Plytas [6], est basé sur le principe d'une interpolation dite « rhéologique » et privilégie la notion de « chemin de cisaillement d'interface ». La dilatance et la contractance localisées jouent un rôle fondamental dans le comportement d'interface. La troisième partie traite des applications à la simulation numérique d'essais d'arrachement de pieux en chambre d'étalonnage. Une série de résultats est présentée et commentée.

Formulation en équations intégrales du problème de contact avec frottement

Le problème de frottement entre solides sous un angle continu en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières a été abordé par quelques auteurs comme Andersson [1], Kwak et Lee [13], Selvadurai [20], Marchina [14], Paris et Garrido [15].

Notre approche consiste à considérer le contact entre deux solides élastiques, les non-linéarités étant concentrées à la surface commune de contact, que nous appellerons désormais interface. Ces non-linéarités proviennent pour l'essentiel de la mobilisation du frottement lors du déplacement relatif des deux solides.

Problème continu

Considérons deux solides 1 et 2 occupant Ω_1 et Ω_2 de \mathbb{R}^3 , en contact entre eux et limités par les frontières Γ_1 et Γ_2 respectivement. Pour chaque solide k ($k=1,2$) l'égalité de Somigliana s'écrit (Brebbia [7]) :

$$cu_i(P) + \int_{\Gamma_k} u_i(Q)T_{ji}(P, Q) d\Gamma_k(Q) = \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma_k} t_i(Q)U_{ji}(P, Q) d\Gamma_k(Q) + \int_{\Omega_k} b_i(Q)U_{ji}(P, Q) d\Omega_k(Q)$$

où u_i et t_i sont respectivement les composantes des vecteurs déplacement et contrainte aux frontières, et où b_i est le vecteur forces de volume. Pour des forces de volume telles que la gravité ou l'inertie rotationnelle, la dernière intégrale de (1) portant sur le volume peut être transformée en une équation intégrale aux frontières à l'aide du théorème de la divergence (Danson [8]). L'équation (1) est établie en utilisant la solution fondamentale des équations de Navier-Cauchy, caractérisée par les tenseurs U_{ji} (en déplacements) et T_{ji} (en contraintes), dont les composantes sont des coefficients d'influence. Ainsi, par exemple, $T_{ji}(P, Q)$ représente les contraintes au point Q , selon la coordonnée j , résultant de l'application d'une force unité ponctuelle au point P et dans la direction i . Le lecteur intéressé trouvera les expressions classiques de ces tenseurs dans la référence [7]. La valeur de la constante c_i dépend de la régularité locale de la frontière ($\approx 0,5$ pour une frontière régulière) au voisinage du point P . Par régulier, nous entendons que la frontière Γ_k du domaine Ω_k est continue, et continûment différentiable par morceaux. En somme, nous tolérons des arêtes (ce qui est bien utile pour les applications) étant entendu que, partout en dehors des arêtes, Γ_k admet un plan tangent unique. Les équations (1) doivent être regardées comme un système d'équations intégrales couplées de type différent selon que le problème aux limites est posé en contraintes ou en déplacements, ou encore en termes mixtes.

Sur une partie Γ_{jk} de la frontière Γ_k les conditions aux limites sont fixées en déplacements ($u_i = \bar{u}_i$ imposé) et sur une partie Γ_{ik} de la frontière Γ_k les contraintes sont imposées ($t_i = \bar{t}_i$). Les frontières Γ_k sont aussi soumises à des conditions de contact sur leur partie Γ_{ck} au temps τ tel que $\tau^1 \leq \tau \leq \tau^2$, où τ^1 et τ^2 sont deux instants séparés par un écart de temps.

Soit Γ_c la surface de contact des deux solides ($\Gamma_c = \Gamma_{c1}$ ou Γ_{c2}). Au temps τ , Γ_c peut être subdivisée en trois régions :

- Γ_{cc} où le contact est dit « collé », donc sans déplacement relatif de Ω_1 par rapport à Ω_2 ;
- Γ_{cg} où le contact est dit « glissant », et donc où existent des déplacements relatifs (tangentiels et normaux) sans perte de contact ;
- Γ_{cr} où le contact a été rompu antérieurement et où existent également des déplacements relatifs (éventuel-

lement grands mais, en fait, petits en raison des hypothèses de base de la mécanique des milieux continus en petits déplacements).

Les conditions statiques et cinématiques sur Γ_c s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} - \text{sur } \Gamma_{cr} : \underline{t}_1 + \underline{t}_2 &= \underline{Q}; \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \\ - \text{sur } \Gamma_{cp} : \underline{t}_1 + \underline{t}_2 &= \underline{Q}; \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = [\underline{u}] \\ - \text{sur } \Gamma_{cr} : \underline{t}_1 = \underline{t}_2 &= \underline{Q}; \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = [\underline{u}] \end{aligned}$$

où $[\underline{u}]$ est le saut de vecteur déplacement.

A partir de la condition statique sur Γ_{cr} , l'équation (1) est réécrite sous une forme plus précise, au temps τ :

$$c_i u_i^\tau + \int_{\Gamma_k} u_i^\tau T_{ji} d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k - \Gamma_{cr}^\tau} t_i^\tau U_{ji} d\Gamma_k + \int_{\Omega_k} b_i^\tau U_{ji} d\Omega_k \quad (2)$$

soit encore, en faisant intervenir les vitesses \dot{u}_i , \dot{t}_i et \dot{b}_i entre $(\tau - d\tau)$ et τ , et la modification de la frontière Γ_{cr} durant le même intervalle de temps :

$$\begin{aligned} c_i \dot{u}_i d\tau + \int_{\Gamma_k} \dot{u}_i d\tau T_{ji} d\Gamma_k &= \int_{\Gamma_k - \Gamma_{cr}^\tau} \dot{t}_i \tau U_{ji} d\Gamma_k - \\ &\int_{d\Gamma_{cr}^\tau - d\tau, \tau} t_i^{\tau-d\tau} U_{ji} d\Gamma_k + \int_{\Omega_k} \dot{b}_i d\tau U_{ji} d\Omega_k \end{aligned} \quad (3)$$

Dans cette formulation incrémentale, la géométrie constitue l'une des inconnues, puisque Γ_{cr}^τ et $d\Gamma_{cr}^\tau$ figurent explicitement dans l'égalité. Les conditions aux limites en déplacements et en contraintes, ainsi que le comportement d'interface sur $(\Gamma_c - \Gamma_{cr})$ ne sont pas contenus dans l'équation (3).

2.2

Problème discrétisé

Si les champs aux frontières de vitesse de déplacement et de vecteur contrainte sont interpolés par les fonctions d'interpolation φ respectivement à partir des valeurs nodales \dot{u}_i^n et \dot{t}_i^n , la forme discrétisée de l'équation (3) pour l'intervalle de temps $\Delta\tau$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \left\{ c_i \varphi^T + \sum_{elem} \int_{\Gamma_k} \varphi^T T_{ji} d\Gamma_k \right\} \dot{u}_i^n \Delta\tau &= \left\{ \sum_{elem} \int_{\Gamma_k - \Gamma_{cr}^\tau} \varphi^T U_{ji} d\Gamma_k \right\} \dot{t}_i^n \Delta\tau - \\ &\left\{ \sum_{elem} \int_{d\Gamma_{cr}^\tau} \varphi^T U_{ji} d\Gamma_k \right\} (t_i^n)^{\tau-\Delta\tau} + \int_{\Omega_k} \dot{b}_i d\tau U_{ji} d\Omega_k \end{aligned} \quad (4)$$

L'équation (4) représente l'approximation « tangente » du problème aux limites dans le cas où une étape de changement correspond à un incrément de calcul en termes de lois de comportement. La mise en œuvre de l'approximation tangente est nettement prohibitive avec des lois de comportement complexes (Boulon [2]). Une approximation plus économique serait une approximation dite « sécante » en temps du problème, qui est celle que nous allons adopter dans la suite.

Soit \underline{U} et \underline{P} les vecteurs dont les composantes sont les valeurs nodales en déplacements (u_i^n) et en contraintes (t_i^n) respectivement. L'écriture approchée de l'équation (2) aux instants τ_1 et τ_2 fait naturellement

intervenir $(\underline{U}^{\tau_2} - \underline{U}^{\tau_1})$ et $(\underline{P}^{\tau_2} - \underline{P}^{\tau_1})$, dans la formulation suivante, exacte aux erreurs de discrétisation près :

$$\begin{aligned} \left\{ \chi_i \varphi^T + \sum_{elem} \int_{\Gamma_k} \varphi^T T_{ji} d\Gamma_k \right\} (\underline{Y}^{\tau_2} - \underline{Y}^{\tau_1}) &= \\ \left\{ \sum_{elem} \int_{\Gamma_k - \Gamma_{cr}^\tau} \varphi^T Y_{ji} d\Gamma_k \right\} (\underline{\Pi}^{\tau_2} - \underline{\Pi}^{\tau_1}) - \\ \left\{ \sum_{elem} \int_{\Gamma_{cr}^{\tau_2} - \Gamma_{cr}^{\tau_1}} \varphi^T Y_{ji} d\Gamma_k \right\} \underline{\Pi}^{\tau_1} + \int_{\Omega_k} (\beta_i^{\tau_2} - \beta_i^{\tau_1}) Y_{ji} d\Omega_k \end{aligned} \quad (5)$$

Supposons que l'évolution des forces extérieures soit linéaire par rapport au temps dans l'intervalle (τ_1, τ_2) . Une combinaison classique de développements de Taylor de \underline{U} au voisinage du temps τ permet d'obtenir :

$$\underline{U}^\tau = \frac{\underline{U}^{\tau_2} - \underline{U}^{\tau_1}}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_2 - \tau) + \frac{(\tau_2 - \tau)^2 - (\tau_1 - \tau)^2}{2(\tau_2 - \tau_1)} \underline{\ddot{U}}^\tau + \mathcal{O}[(\tau_2 - \tau_1)^2] \quad (6)$$

De sorte que \underline{U}^τ peut être considéré comme constant, au premier ordre près à condition que :

$$\|\underline{\ddot{U}}^\tau\|_\infty \ll \frac{2}{(\tau_2 - \tau_1)^2} \|\underline{U}^{\tau_2} - \underline{U}^{\tau_1}\|_\infty; \tau \in [\tau_1, \tau_2] \quad (7)$$

où $\|\cdot\|_\infty$ représente la norme infinie. De la même manière, nous supposons réalisée la condition :

$$\|\underline{\ddot{P}}^\tau\|_\infty \ll \frac{2}{(\tau_2 - \tau_1)^2} \|\underline{P}^{\tau_2} - \underline{P}^{\tau_1}\|_\infty; \tau \in [\tau_1, \tau_2] \quad (8)$$

L'intégration approchée du comportement d'interface (caractérisé par sa matrice rhéologique entre τ_1 et τ_2) s'écrit alors :

$$\underline{Q}_{elem} (\underline{P}^{\tau_2} - \underline{P}^{\tau_1}) = \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \underline{d} \frac{d\tau}{\tau_2 - \tau_1} \right] \underline{Q}_{elem} (\underline{U}^{\tau_2} - \underline{U}^{\tau_1}) \quad (9)$$

où \underline{Q}_{elem} est la matrice de passage des axes globaux aux axes locaux de chaque élément. L'équation (9) fait apparaître le comportement d'interface intégré entre τ_1 et τ_2 . L'équilibre nodal n'est assuré qu'aux temps τ_1 et τ_2 . En particulier, pour la suite, nous supposons que l'état au temps τ_1 est un état d'équilibre connu.

2.3

Procédure de sous-structuration

Selon qu'on est mathématicien ou ingénieur, cette technique peut être regardée comme une manière soit de gérer la résolution d'un système linéaire d'équations, soit de partitionner physiquement un système mécanique complexe (Trompette [21]). Pour le cas de deux solides élastiques en contact, on ne gardera après sous-structuration que les degrés de liberté de la zone de contact Γ_c .

En interaction sol-structure (Boulon [2]), l'intérêt de la sous-structuration est de traiter différemment les zones fortement et faiblement non linéaires. Généralement, l'interface sol-structure est fortement non linéaire, tandis que les solides (structure, sol proprement dit) le sont à un degré moindre (ici, pas du tout).

On écrira l'équation (4) pour chaque solide k sous la forme matricielle :

$$\underline{H}^k \underline{U}^k = \underline{G}^k \underline{P}^k + \underline{B}^k \quad (10)$$

où \underline{H} contient les résultats des intégrations

$\int_{\Gamma_e} \varphi^T T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q)$ et les constantes c_i si $Q(\xi_i)$ est dans le même élément que $P(x_j)$. On définit aussi les variables :

\underline{U} : vecteur contenant toutes les valeurs nodales $u_i^n(Q)$;

\underline{G} : matrice contenant les résultats des intégrations $\int_{\Gamma_e} \varphi^T U_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q)$;

\underline{P} : vecteur contenant toutes les valeurs nodales $t_i^n(Q)$;

\underline{B} : vecteur contenant les résultats des intégrations $\int_{\Omega} b_i(Q) U_{ji}(P, Q) d\Omega(Q)$.

En utilisant l'équation (10) nous pouvons écrire pour chaque solide k :

$$\left[\begin{array}{c} \underline{G}^k \\ \underline{G}_s^k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}^k \\ \underline{P}_s^k \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \underline{H}^k \\ \underline{H}_s^k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{U}^k \\ \underline{U}_s^k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \underline{B}^k \\ \underline{B}_s^k \end{array} \right\} \quad (11)$$

où l'indice inférieur s correspond aux degrés de liberté relatifs à l'interface Γ_c . Exprimons maintenant les équations (11) comme suit :

$$\left[\underline{G}^k \right] \left\{ \underline{P}^k \right\} = \left[\underline{H}^k \right] \left\{ \underline{U}^k \right\} + \left[-\underline{G}_s^k \quad \underline{H}_s^k \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}_s^k \\ \underline{U}_s^k \end{array} \right\} + \left\{ \underline{B}^k \right\} \quad (12)$$

Le système (12) peut encore se décomposer en deux sous-systèmes (indiqués a et b) :

$$\left[\underline{G}_a^k \right] \left\{ \underline{P}^k \right\} = \left[\underline{H}_a^k \right] \left\{ \underline{U}^k \right\} + \left[-\underline{G}_{a_s}^k \quad \underline{H}_{a_s}^k \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}_s^k \\ \underline{U}_s^k \end{array} \right\} + \left\{ \underline{B}^k \right\} \quad (13)$$

$$\left[\underline{G}_b^k \right] \left\{ \underline{P}^k \right\} = \left[\underline{H}_b^k \right] \left\{ \underline{U}^k \right\} + \left[-\underline{G}_{b_s}^k \quad \underline{H}_{b_s}^k \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}_s^k \\ \underline{U}_s^k \end{array} \right\} + \left\{ \underline{B}^k \right\} \quad (14)$$

Si toutes les conditions aux limites sont données en déplacements, on notera $\underline{F}_a^k = \underline{H}_a^k \underline{U}^k$ et $\underline{X}^k = \underline{P}^k$. Ainsi \underline{X}^k sera le vecteur contenant les inconnues sur la frontière $\Gamma_k - \Gamma_c$. Transformons l'équation (13) en multipliant à gauche par $(\underline{G}_a^k)^{-1}$:

$$\underline{X}^k = (\underline{G}_a^k)^{-1} (\underline{F}_a^k + \underline{D} \underline{X}_s^k + \underline{B}^k) \quad (15)$$

avec :

$$\underline{D} = \left[-\underline{G}_{a_s}^k \quad \underline{H}_{a_s}^k \right] \text{ et } \underline{X}_s^k = \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}_s^k \\ \underline{U}_s^k \end{array} \right\}$$

En reportant l'équation (15) dans l'équation (14) nous obtenons :

$$\left[\underline{G}_b^k (\underline{G}_a^k)^{-1} \underline{D} + \underline{E} \right] \underline{X}_s^k = \underline{F}_b^k - \underline{G}_b^k (\underline{G}_a^k)^{-1} (\underline{F}_a^k + \underline{B}^k) \quad (16)$$

où nous avons noté :

$$\underline{E} = \left[-\underline{G}_{b_s}^k \quad \underline{H}_{b_s}^k \right]$$

Le système (16) a comme inconnues les degrés de liberté de l'interface et peut s'exprimer en utilisant la notation abrégée suivante :

$$\underline{J}^k \underline{X}_s^k = \underline{K}^k \quad (17)$$

où nous avons noté :

$$\underline{J}^k = \underline{G}_b^k (\underline{G}_a^k)^{-1} \underline{D} + \underline{E} \\ \underline{K}^k = \underline{F}_b^k - \underline{G}_b^k (\underline{G}_a^k)^{-1} (\underline{F}_a^k + \underline{B}^k)$$

L'équation (17) constitue le véritable point de départ pour l'étude du problème de contact de deux solides élastiques. Il reste à définir les équations de compatibilité à l'interface, c'est-à-dire les conditions cinématiques et statiques entre les vecteurs déplacements et contraintes qui résultent de la loi d'interface intégrée.

2.4

Contact avec loi d'interface

On suppose partir d'un état d'équilibre ; les étapes de chargement (notées $\Delta \dots$, problème sécant) regroupent un certain nombre d'incrément pour la loi d'interface. Les équations (17) pour le solide i sont :

$$\underline{J}^i \Delta \underline{X}_s^i = \Delta \underline{K}^i \quad (18)$$

En supposant une continuité de contraintes entre solides et la possibilité d'un pas de vecteur déplacement relatif $\Delta[\underline{U}]$, les équations de compatibilité à l'interface s'écrivent :

$$\Delta \underline{P}_s^i + \Delta \underline{P}_s^j = 0 \\ \Delta \underline{U}_s^i - \Delta \underline{U}_s^j = \Delta[\underline{U}] \quad (19)$$

et la loi d'interface en axes locaux pour le solide 2 est de la forme :

$$\Delta \underline{P}_s^2 = \underline{d}_0 \Delta[\underline{U}] + \Delta \underline{t} \quad (20)$$

où \underline{d}_0 est une matrice diagonale d'élasticité auxiliaire avec une composante normale k_n et deux composantes tangentielles k_t et k_s ; $\Delta \underline{t}$ est une correction due aux termes non linéaires. Soit encore :

$$\Delta \underline{X}_s^1 = \underline{T} \Delta \underline{X}_s^2 + \Delta[\underline{U}] \quad (21)$$

$$\Delta \underline{P}_s^2 = \underline{Q} \Delta \underline{X}_s^2 \quad (22)$$

où \underline{T} est une matrice bande étroite constituée de termes pouvant être $-1, 0$ et $+1$. \underline{Q} est la matrice de passage des axes globaux $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ aux axes locaux $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{s})$. A l'aide des équations (18), (21) et (22) le système global d'équations relatif aux degrés de liberté de l'interface est finalement :

$$\left[\begin{array}{cc} \underline{J}^1 \underline{T} \underline{J}^2 \underline{Q}^T \\ \underline{J}^2 \\ \underline{Q} \quad -\underline{d}_0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{P}_s^2 \\ \Delta \underline{U}_s^2 \\ \Delta[\underline{U}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{K}^1 \\ \Delta \underline{K}^2 \\ \Delta \underline{t} \end{array} \right\} \quad (23)$$

Le système (23) est carré avec neuf équations par nœud pour des éléments frontières constants, en tridimensionnel.

Si $\Delta t = 0$, on a un système algébrique linéaire, et si $\Delta t \neq 0$ (loi non linéaire), il faut résoudre un système algébrique non linéaire par itérations successives. Nous utilisons la procédure de Newton-Raphson modifiée consistant à considérer la matrice auxiliaire d_0 constante, et donc l'opérateur du premier membre du système (23) toujours constant également. Il reste bien entendu un compromis à faire entre une rigidité auxiliaire d_0 forte, assurant une convergence sûre mais lente, et une élasticité auxiliaire faible, permettant parfois une convergence plus rapide, mais conduisant aussi souvent à une divergence.

Nous avons entièrement mis en œuvre un code de calcul nommé *BEMCOF*, permettant d'étudier les problèmes aux limites relatifs à deux solides 3D en contact avec une loi d'interface *a priori* quelconque; l'organigramme de fonctionnement est présenté à la figure (1).

Il sera question dans ce qui suit de deux types de loi d'interface: la première nous permet de modéliser un contact parfaitement lisse, et la deuxième est basée sur la théorie des lois dites incrémentales non linéaires.

3

Lois d'interface

3.1

Contact à frottement nul (parfaitement lisse)

Posons tout d'abord les conditions de nature à assurer un contact parfaitement glissant. Nous supposons toujours une continuité de contraintes entre solides. Les conditions statiques s'écrivent donc :

$$\Delta P_s^1 + \Delta P_s^2 = 0 \quad (24)$$

Cette relation représente trois équations par nœud en 3D. $\Delta[U]$ est le déplacement relatif entre les deux solides en axes locaux, selon les deux directions tangentielles (\vec{t}, \vec{s}) et selon une direction normale (\vec{n}). Les conditions cinématiques sont :

$$\begin{aligned} \Delta[U] &\neq 0 \text{ selon } (\vec{t}, \vec{s}) \\ \Delta[U] &= 0 \text{ selon } (\vec{n}) \end{aligned} \quad (25)$$

Le frottement nul est traduit par la relation :

$$Q \Delta P_s^2 = 0 \text{ selon } (\vec{t}, \vec{s}) \quad (26)$$

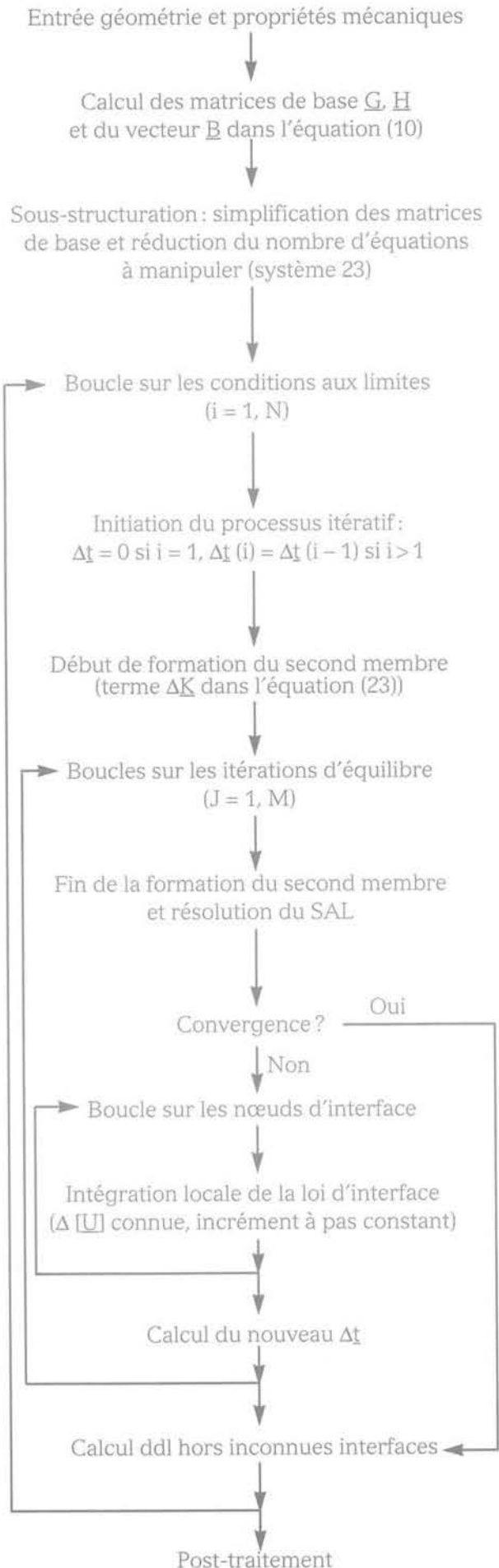


FIG. 1

Organigramme du code BEMCOF pour l'étude de problèmes de contact entre deux solides élastiques 3D avec loi d'interface (SAL = Système Algébrique Linéaire, ddl = degré de liberté). Flow chart of the boundary element code BEMCOF (SAL = Linear Algebraic System, ddl = degree of freedom).

Le système sous-structuré à résoudre pour le cas du contact parfaitement lisse est finalement le suivant :

$$\begin{bmatrix} \underline{J^1 T} & \underline{J^1 Q^T} \\ \underline{J^2} & \underline{0} \\ \underline{Q} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P^2 \\ \Delta U_s^2 \\ \Delta [U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta K^1 \\ \Delta K^2 \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Pour le vecteur $\Delta [U]$ dans le système (27) les seules composantes non nulles sont celles correspondant aux déplacements relatifs tangentiels selon (\vec{t}) et (\vec{s}) . Le

système est carré avec huit équations par nœud pour des éléments frontières constants, en 3D.

Nous pouvons utiliser aussi directement le système d'équations (27) pour approcher le contact parfaitement glissant en faisant les itérations d'équilibre nécessaires pour vérifier :

$$\underline{Q} \Delta P_s^2 = 0 \text{ selon } (\vec{t}, \vec{s}) \quad (28)$$

Nous utiliserons cette dernière procédure pour ce qui concerne l'initialisation de l'état de contrainte à l'interface avant chargement.

Résultats classiques du comportement d'interface

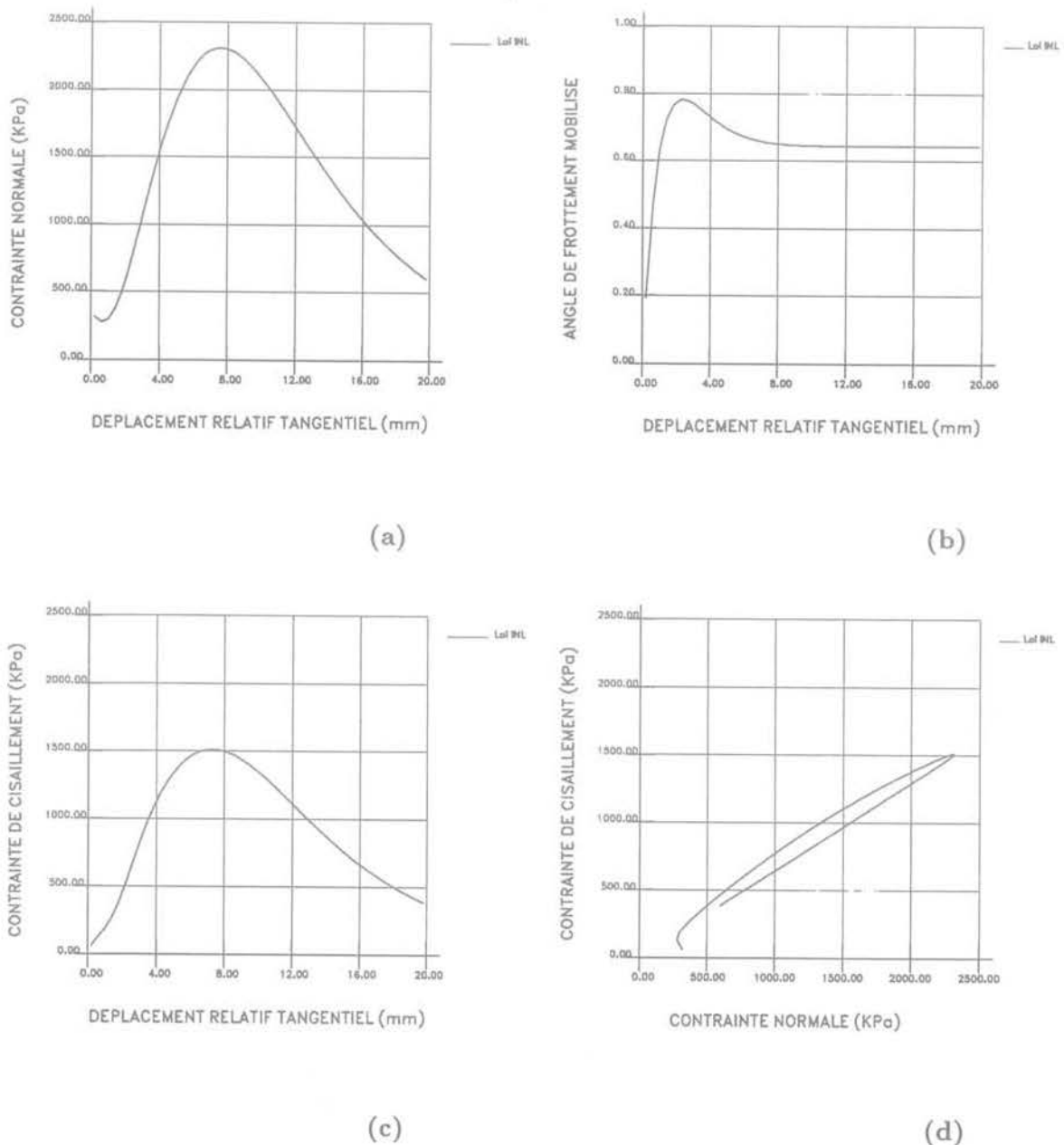


FIG. 2 Résultats classiques de l'intégration d'une loi d'interface incrémentale non linéaire : sable dense, $\sigma_{n0} = 300 \text{ kPa}$, rigidité normale imposée : $10\,000 \text{ kPa/mm}$.
Classical dense sand-rough material interface behaviour. Interface law integration at prescribed normal stiffness of $10,000 \text{ kPa/mm}$ and $\sigma_{n0} = 300 \text{ kPa}$.

Contact à comportement incrémentalement non linéaire

L'écriture de base pour les lois incrémentales non-linéaires est du type :

$$\dot{t} = \underline{d} \cdot \left[\dot{\underline{U}} \right] \quad (29)$$

où \dot{t} et $\left[\dot{\underline{U}} \right]$ sont respectivement les vitesses de vecteur contrainte et de déplacement relatif agissant sur l'interface. \underline{d} est la matrice constitutive fonction des paramètres d'état et de la direction de sollicitation incrémentale. Nous nous intéressons aux lois de type « interpolation » dont l'idée directrice est d'obtenir la réponse à une sollicitation quelconque par interpolation au niveau incrémental. C'est-à-dire que si nous connaissons les réponses r_i à des sollicitations s_i , la réponse r à une sollicitation quelconque peut être obtenue par la relation :

$$r = \sum_{i=1}^N W_i(s_i) r_i \quad (30)$$

où les W_i sont des fonctions d'interpolation. Une discussion complète sur ces fonctions d'interpolation est présentée à la référence [5].

A titre illustratif, nous présentons (Fig. 2) des résultats typiques de l'intégration de l'équation (29) pour un chemin de sollicitation à rigidité normale imposée et pour une interface sol-structure dont l'état initial est défini par une contrainte normale initiale et par une densité initiale.

La variation de la contrainte normale (voir Fig. 2a) au cours du cisaillement met en évidence la cinématique classique du comportement des interfaces sol-structure, telle qu'on peut l'observer par des essais de laboratoire à la boîte de cisaillement directe modifiée (Boulon [3]). Remarquons la diminution initiale de contrainte due à une faible contractance initiale elle-même provenant d'un réarrangement des particules en début de sollicitation. Cette première phase est suivie d'une dilatance produite par la tendance des particules à rouler sans glisser les unes sur les autres, et finalement d'une contractance due pour l'essentiel à la rupture des grains. Le trajet de contraintes suivi par le matériau d'interface est classiquement celui de la figure (2d).

L'intégration de ce type de loi a déjà été abordée par Marchina [14] dans l'étude de problèmes de contact avec la méthode des équations intégrales en axisymétrie, et par Rouainia [19] qui traite l'interaction sol-structure en éléments finis de haute précision.

Simulation numérique d'essais d'arrachement en chambre d'étalonnage

Présentation du problème

La chambre d'étalonnage est un outil de simulation physique utilisé en mécanique des sols pour recréer, au

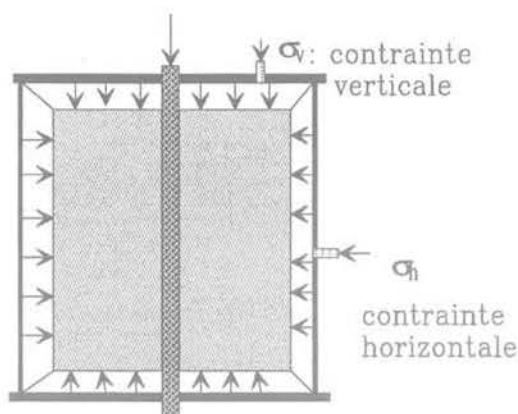


FIG. 3 Schéma de la chambre d'étalonnage.
Scheme of the calibration chamber.

sein d'un échantillon de sol, un niveau de contrainte représentatif d'une situation réelle donnée, et plus particulièrement pour reproduire en laboratoire l'effet de la profondeur par application de conditions aux limites sous forme de fortes pressions verticales et horizontales (le plus souvent verticales seulement).

Pour l'étude du frottement latéral des pieux en milieu pulvérulent, Eissautier [9] a utilisé une chambre d'étalonnage prototype de faibles dimensions (0,5 m de hauteur et 0,3 m de diamètre (Fig. 3)). Les parties supérieure et inférieure de la cuve sont percées de façon à pouvoir laisser passer un pieu cylindrique de 3,5 cm de

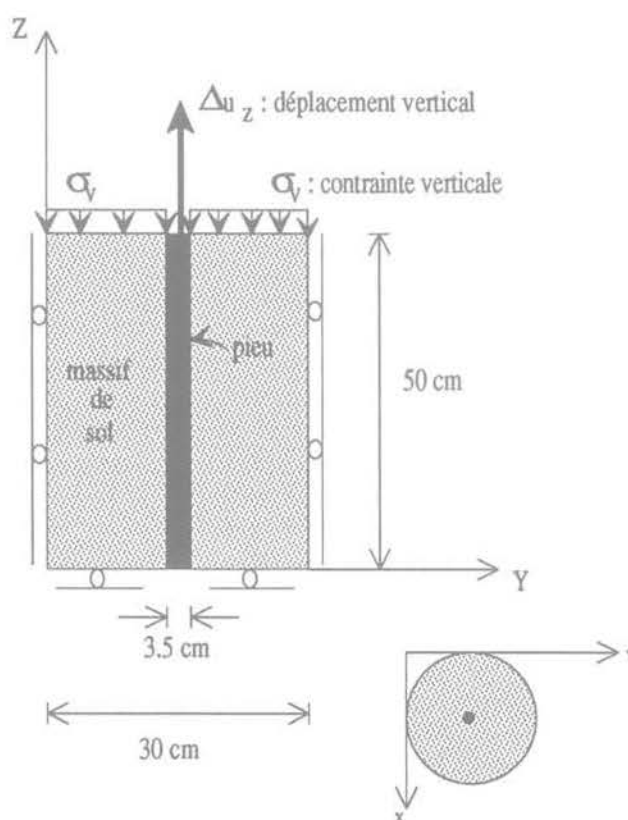


FIG. 4 Géométrie et conditions aux limites de la chambre d'étalonnage.
Geometry and boundary conditions for the calibration chamber problem.

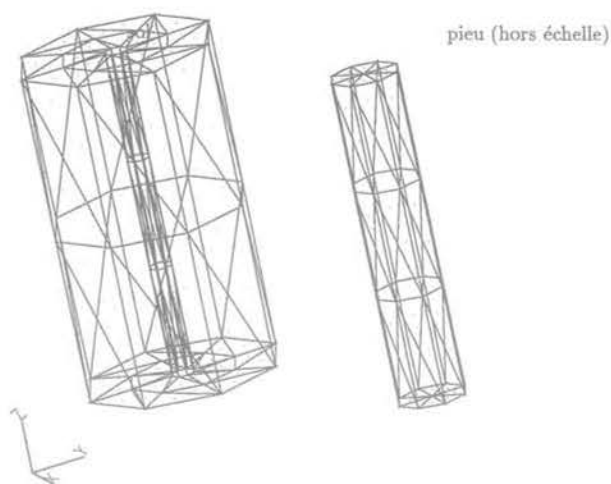


FIG. 5 Maillage de la chambre d'étalonnage.
Mesh for the calibration chamber problem.

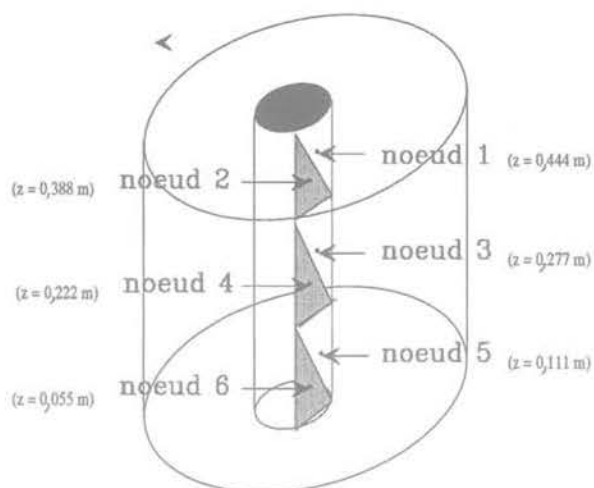


FIG. 6 Éléments à l'interface pieu-massif de sol.
Nodes at the soil-pile interface.

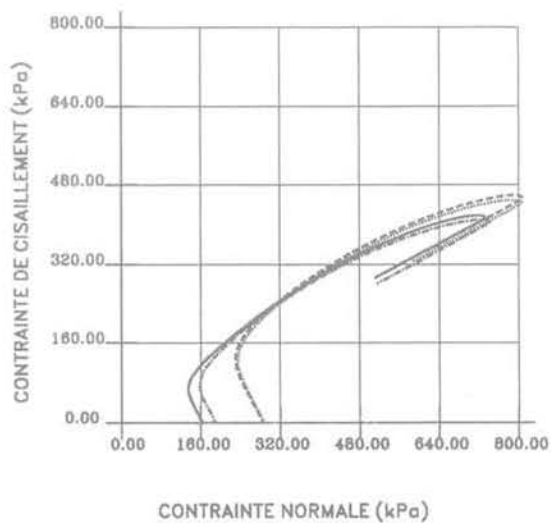
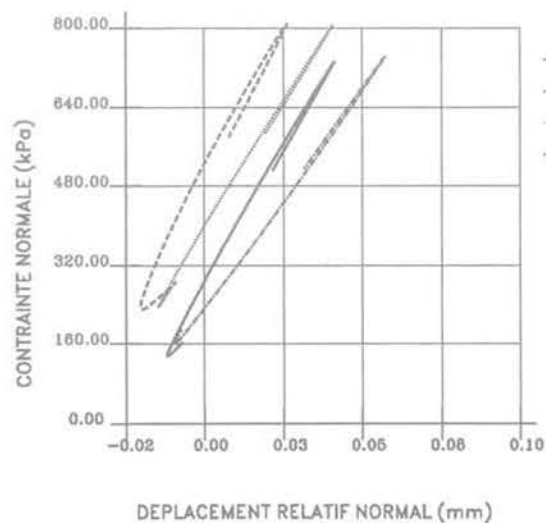
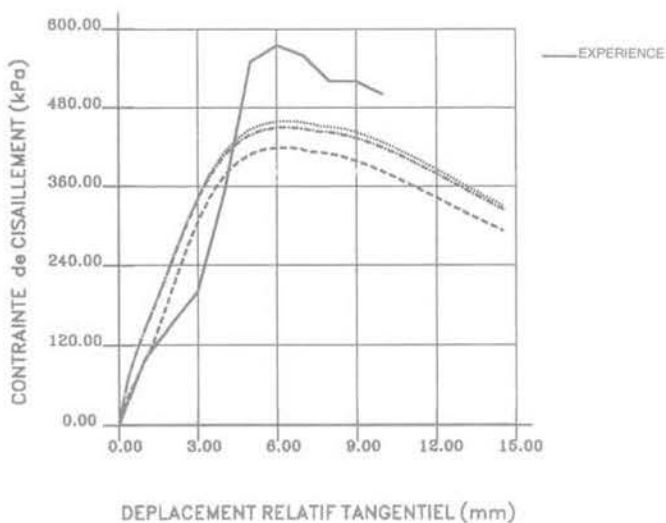
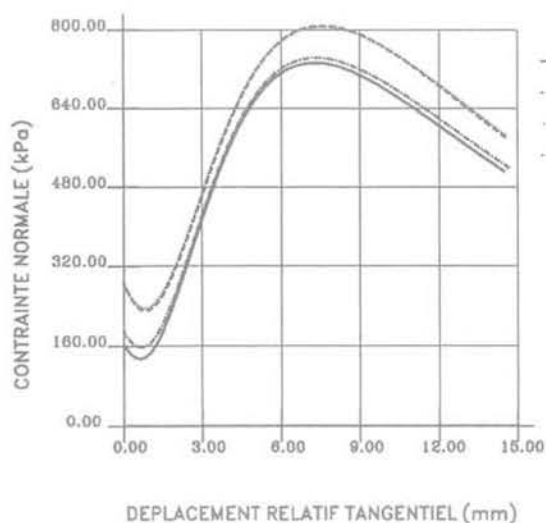


FIG. 7 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage, chemins locaux aux nœuds 1, 2, 3, 4 et 6; $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,9$.
Numerical modelisation of a tension test in calibration chamber. Local paths at nodes 1, 3, 4 and 6. Case 1: $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0,9$.

diamètre. Ce pieu traversant la cuve de part en part, l'influence de la pointe est éliminée. Une contrainte verticale (σ_v) simulant l'effet de la profondeur est appliquée par l'intermédiaire de membranes souples sur les faces supérieure et inférieure de la cuve. La paroi latérale est également équipée de membranes, et permet d'appliquer des conditions aux limites « extrêmes » (pression latérale constante ou non-variation de volume).

Le sable utilisé est le sable d'Hostun « moyen » ($d_{50} = 0,70$ mm), le même sable que celui utilisé par Hoteit [12] pour sa campagne d'essais de cisaillement direct ayant servi à déterminer les paramètres de la loi d'interface présentée au chapitre précédent.

Les figures 4 et 5 montrent respectivement les conditions aux limites et le maillage utilisé. La frontière de la chambre d'étalonnage a été discrétisée à l'aide de 144 éléments triangulaires plans et la surface du pieu

par 64 éléments, dont 48 appartenant à l'interface (Fig. 6). Le système non linéaire sous-structuré à résoudre comporte alors 432 inconnues correspondant aux degrés de liberté de l'interface. Pour chaque nœud les inconnues sont les composantes du vecteur contrainte, du vecteur déplacement et du vecteur déplacement relatif entre le massif de sol et le pieu, soit neuf degrés de liberté par nœud à l'interface pour un problème en 3D.

Nous présentons les simulations numériques correspondant à trois essais d'arrachement réalisés par Eissautier [9]. Pour le pieu en acier nous avons pris un module de cisaillement équivalent de 8.10^7 kPa et un coefficient de Poisson de 0,33, car le pieu était tubulaire. Pour les propriétés physiques du massif de sol, nous avons estimé les modules de cisaillement à partir des essais pressiométriques de Renoud-Lias [18].

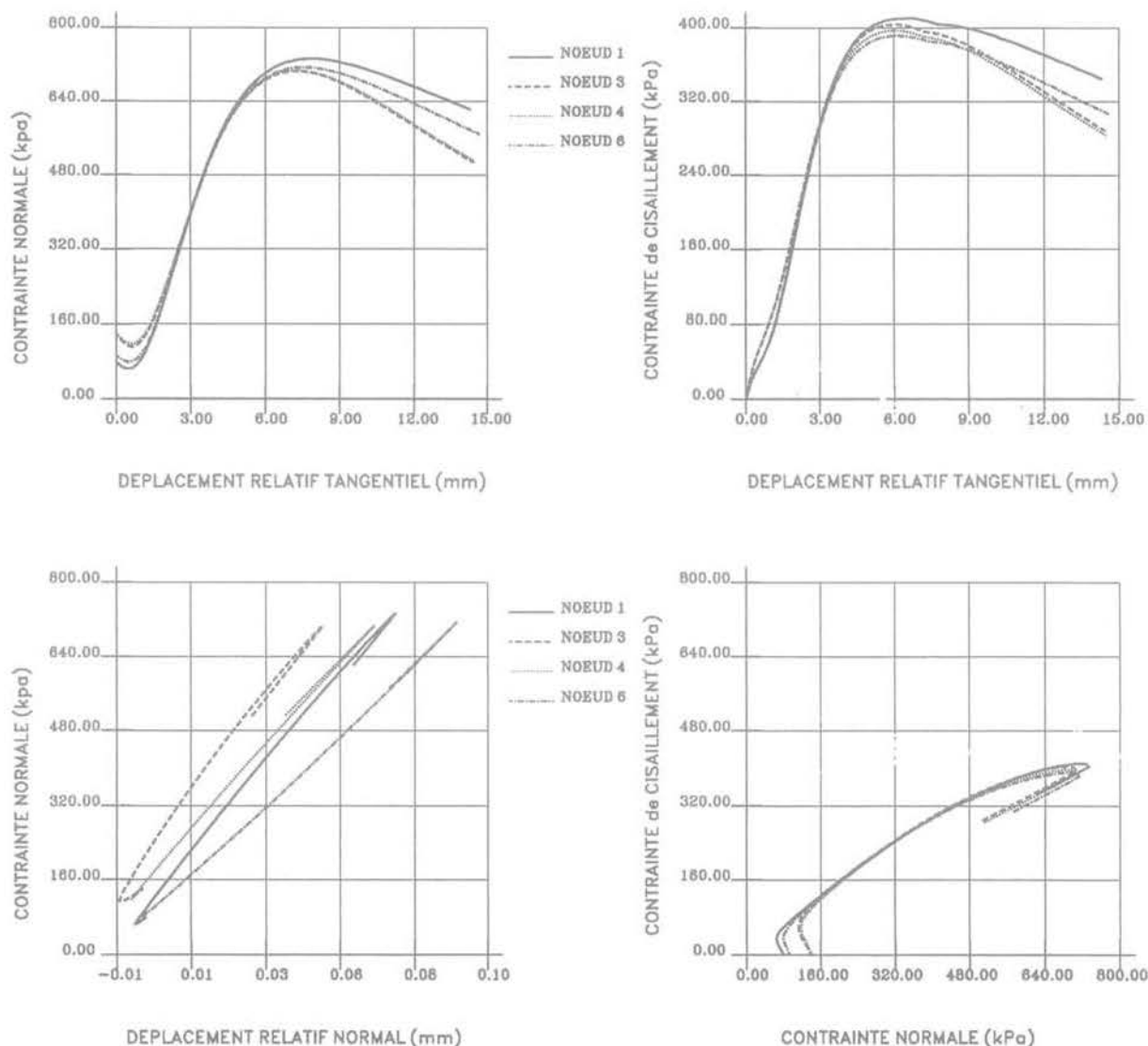


FIG. 8 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage, chemins locaux aux nœuds 1, 3, 4 et 6 : $\sigma_v = 284$ kPa, $D_r = 0,9$.
 Numerical modelisation of a tension test in calibration chamber. Local paths at nodes 1, 3, 4 and 6. Case 2: $\sigma_v = 284$ kPa, $I_p = 0,9$.

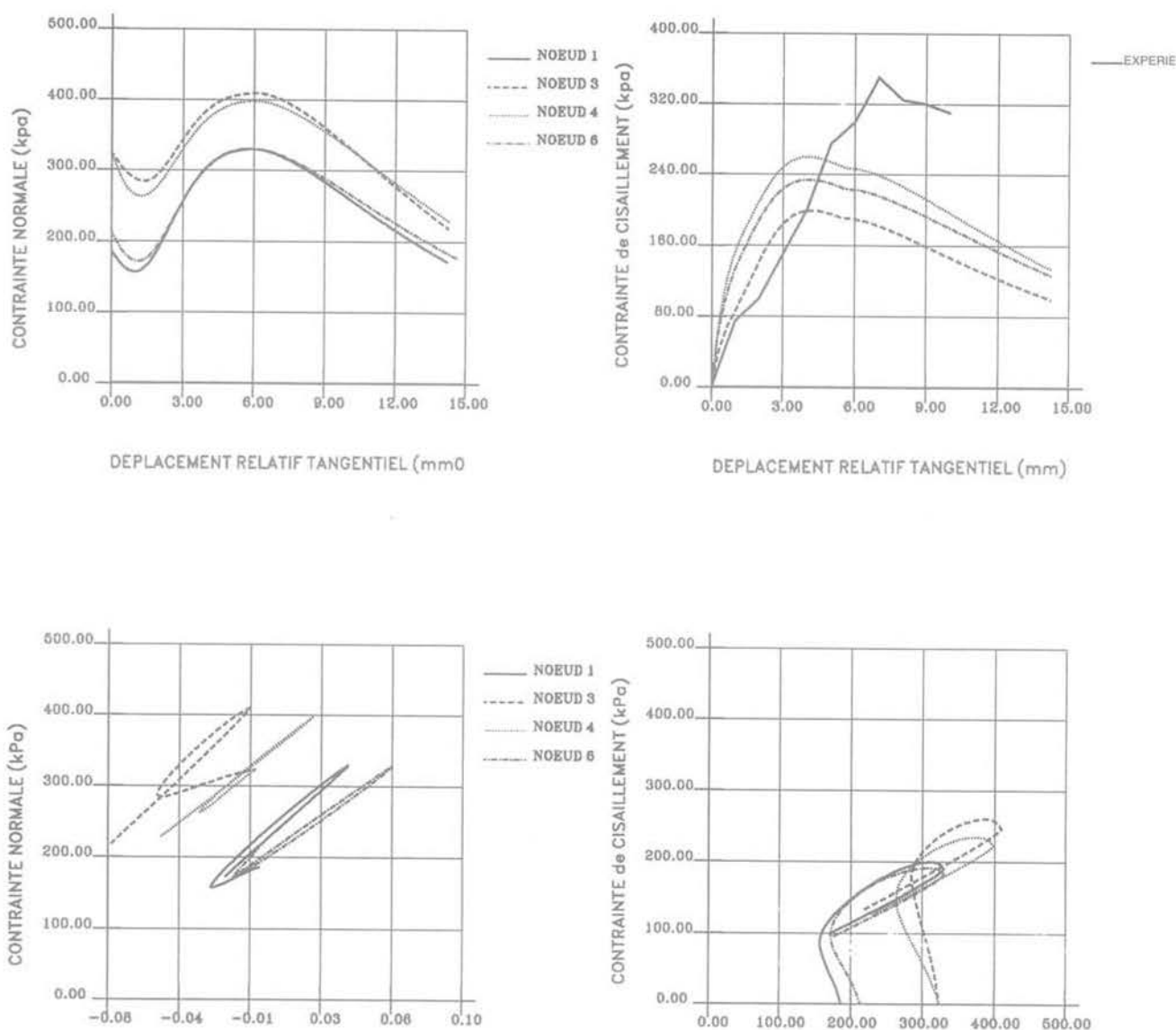


FIG. 9 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage, chemins locaux aux nœuds 1, 3, 4 et 6 : $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$.
 Numerical modelisation of a tension test in calibration chamber. Local paths at nodes 1, 3, 4 and 6. Case 3: $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0,3$.

Il est bien connu que le module de cisaillement du sol est fonction du niveau de contrainte (σ_v) et de la densité relative (D_r). Les valeurs utilisées pour nos simulations sont les suivantes :

- cas 1 :** $G_{sol} = 56.10^3 \text{ kPa}$ pour $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$ et $D_r = 0,9$
- cas 2 :** $G_{sol} = 42.10^3 \text{ kPa}$ pour $\sigma_v = 284 \text{ kPa}$ et $D_r = 0,9$
- cas 1 :** $G_{sol} = 12.10^3 \text{ kPa}$ pour $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$ et $D_r = 0,3$

Pour les trois cas, nous avons adopté un coefficient de Poisson de 0,33 pour le massif de sol. Les rigidités locales auxiliaires de l'interface sont les suivantes :

propriétés élastiques auxiliaires :

- $k_n = 6.10^7 \text{ kPa/m}$ (normale)
- $k_t = 5.10^6 \text{ kPa/m}$ (tangentielle)
- $k_s = 5.10^6 \text{ kPa/m}$ (tangentielle)

Le calcul est effectué en deux étapes :

1. Initialisation œdométrique de l'état de contrainte à l'interface de manière à assurer un contact sans frottement ($\tau = 0$ à l'interface). La contrainte normale (σ_n) est initialisée en prenant $K_0 = 0,5$ comme coefficient de poussée du sol, avec $\sigma_n = K_0 \sigma_{zz}$ avec $\sigma_{zz} = \sigma_v$, σ_k étant la contrainte verticale simulant l'effet de profondeur.

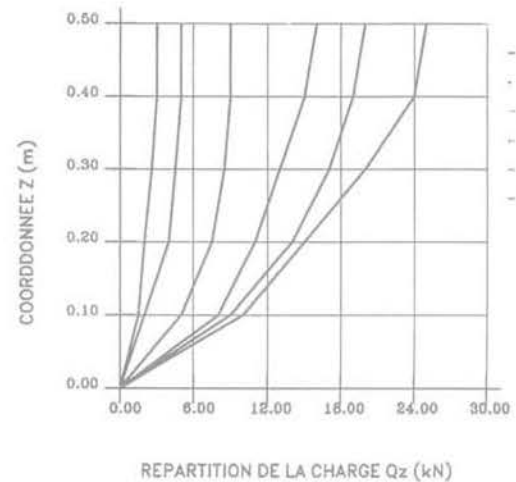
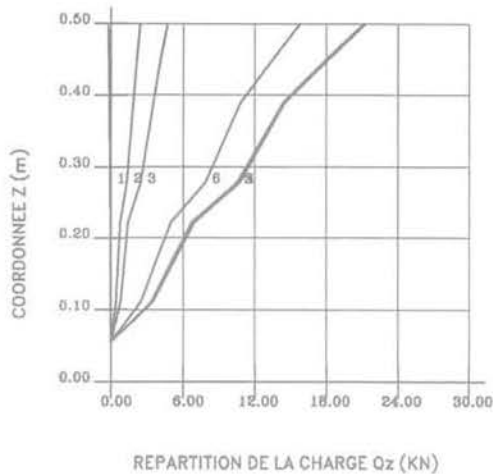
L'initialisation des contraintes de cisaillement à zéro correspond au cas idéal d'un pieu parfaitement moulé *in situ*. La vitesse de convergence pour atteindre cet état de contraintes dépend du choix des rigidités locales tangentielles k_t et k_s . On pourrait obtenir un contact parfait sans frottement si l'on prenait $k_t = 0$, $k_s = 0$ et une valeur très élevée pour la rigidité locale normale k_n .

a) Distribution de la charge le long du pieu

$$\sigma_v = 600 \text{ kPa}, D_r = 0.9$$

Simulation

Expérience



b) Evolution de charge en tête du pieu

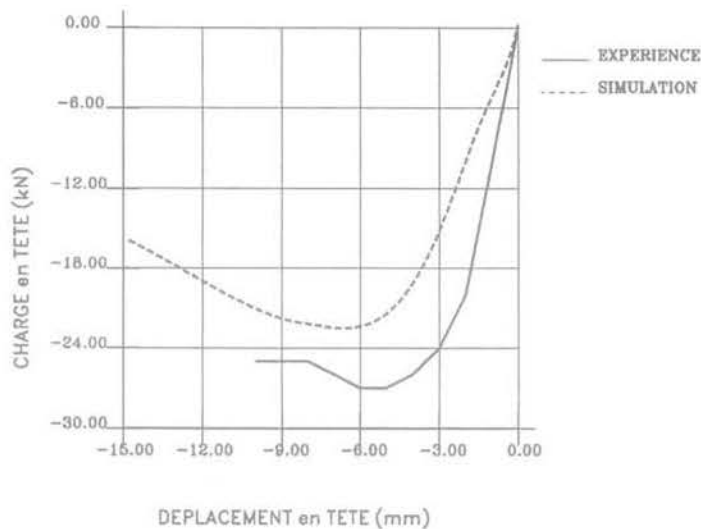


FIG. 10 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage : $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0.9$. Comparison between the computed and the measured (a) load transfer curves and (b) load versus prescribed displacement. Case 1 : $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0.9$.

2. Chargement du pieu par une sollicitation imposée en déplacements. Pour chaque étape de chargement, on impose un déplacement vertical Δu_z de 0,1 mm en tête du pieu (voir Fig. 4). Nous avons mené le calcul jusqu'à 15 mm, ce qui représente donc 150 étapes de chargement.

Au niveau local, l'intégration de la loi d'interface utilise une procédure d'incrémentation avec un pas constant de 0,05 mm. La vitesse de convergence dépend aussi du choix des rigidités locales auxiliaires. Un compromis reste à faire entre le choix d'une rigidité élevée donnant une convergence sûre mais lente et une rigidité faible pouvant conduire à une divergence.

Analyse des chemins locaux

Nous nous intéressons aux chemins locaux suivis par l'interface entre le pieu et le massif de sol. C'est à ce niveau que nous pouvons apprécier le comportement non linéaire d'interface tel que nous le modélisons avec la loi proposée précédemment. Les résultats pour chacune des trois simulations effectuées sont présentés sur les figures 7 à 9. Sur chacune de ces figures, quatre graphiques ont été portés. Le premier concerne l'évolution de la contrainte normale avec le déplacement relatif tangentiel entre le pieu et le massif de sol, et permet d'observer la cinématique classique du comportement d'interface : contractance initiale, puis dilatance et finalement une deuxième phase de contractance due à la rupture des grains. Le deuxième graphique compare l'évolution calculée de la contrainte de cisaillement durant le chargement avec celle mesurée (en moyenne) par Essautier [9] à partir de ses essais. Le troisième graphique présente la variation presque linéaire et réversible de la contrainte normale avec le déplacement relatif normal, la pente correspondant à la rigidité latérale imposée à l'interface. Cette rigidité décroît avec le niveau de contrainte (σ_v) et avec la densité relative (D_r) du matériau constituant le massif de sol. Enfin, le dernier graphique montre la trajectoire suivie dans l'espace de contraintes.

Analyse des résultats globaux

Pour un niveau global, nous nous intéressons à la mobilisation du frottement latéral pendant le chargement et aussi à l'évolution de la charge en tête en fonction de son déplacement. Pour chacune des simulations effectuées, les résultats numériques sont comparés à ceux de l'expérience sur les figures 10 à 12. Une concordance plus que qualitative est observée tant globalement que localement, en termes de modules et de valeurs limites de frottement mobilisé. Il est également fort intéressant de remarquer que les chemins de contraintes calculés sont très comparables à ceux qui ont été mesurés par divers auteurs (Puech [17], Wernick [22]) d'une part, et calculés en éléments finis pour le même exemple par Rouainia [19] d'autre part.

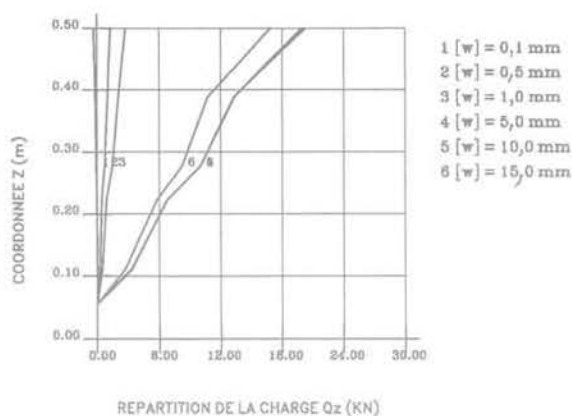
Étude de l'influence du maillage sur les résultats numériques

Pour l'étude de l'influence du maillage sur nos simulations numériques d'essais d'arrachement en chambre d'étalonnage, nous considérons le cas pour lequel la contrainte σ_v simulant l'effet de la profondeur est égale à 600 kPa, avec une densité relative $D_r = 0,9$.

Les trois maillages utilisés sont présentés à la figure 13; les caractéristiques de chacun de ces maillages,

a) Distribution de la charge le long du pieu

$$\sigma_v = 284 \text{ kPa}, D_r = 0.9$$



b) Evolution de la charge en tête du pieu

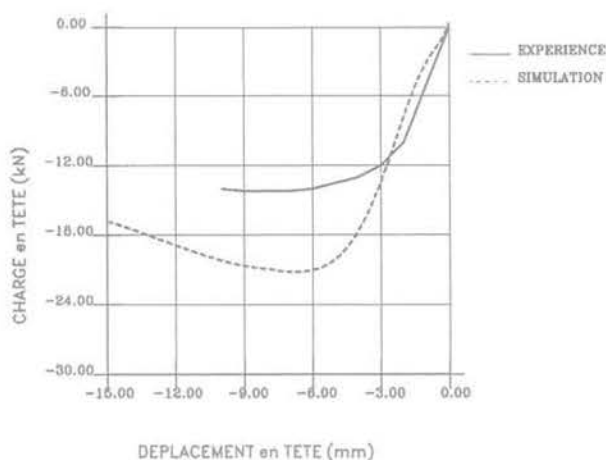


FIG. 11 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage : $\sigma_v = 284 \text{ kPa}$, $D_r = 0.9$.
Comparison between the computed and the measured (a) load transfer curves and (b) load versus prescribed displacement. Case 2: $\sigma_v = 284 \text{ kPa}$, $I_D = 0.9$.

ainsi que les temps CPU nécessaires aux simulations correspondantes, sont les suivants :

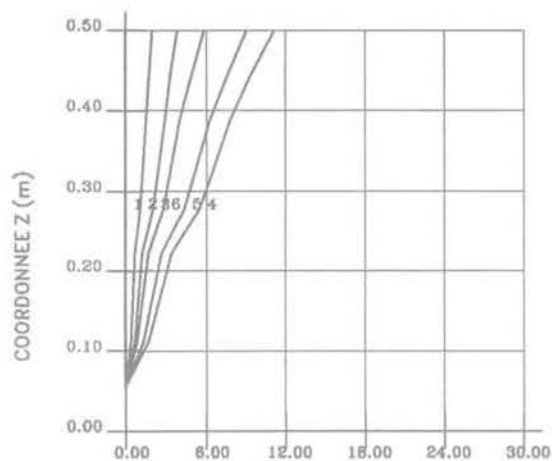
Maillage	1	2	3
Nombre d'éléments pour le massif de sol	144	216	180
Nombre d'éléments pour le pieu	64	64	120
Nombre d'éléments à l'interface	48	48	96
Temps CPU (s) sur une station de travail DEC5000/200	983	1640	2 265

a) Distribution de la charge le long du pieu

$$\sigma_v = 600 \text{ kPa}, D_r = 0.3$$

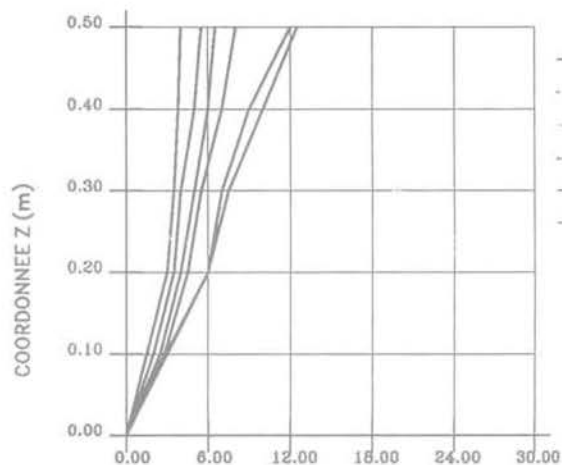
Simulation

Expérience



- 1 [w] = 0,1 mm
- 2 [w] = 0,5 mm
- 3 [w] = 1,0 mm
- 4 [w] = 5,0 mm
- 5 [w] = 10,0 mm
- 6 [w] = 15,0 mm

REPARTITION DE LA CHARGE Qz (KN)



REPARTITION DE LA CHARGE Qz (kN)

b) Simulation d'essai d'arrachement en chambre d'étalonnage

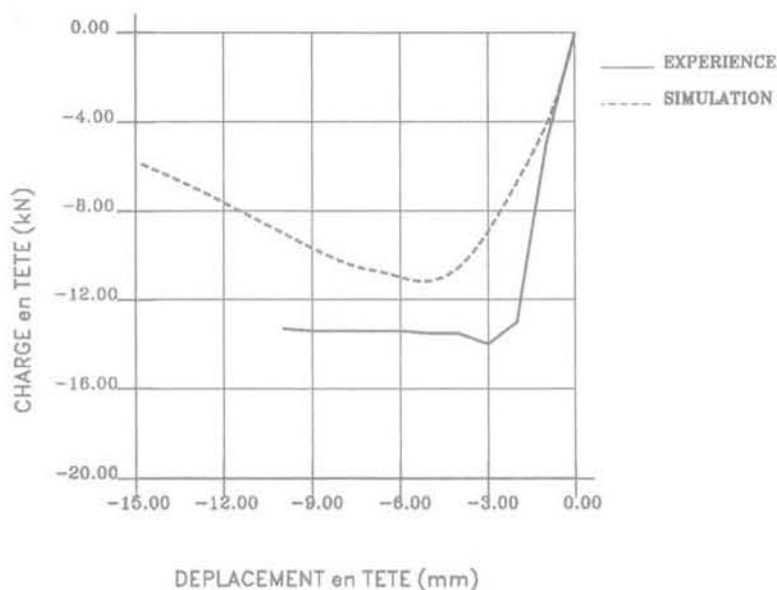


FIG. 12 Simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage: $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$. Comparison between the computed and the measured (a) load transfer curves and (b) load versus prescribed displacement. Case 3: $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0,3$.

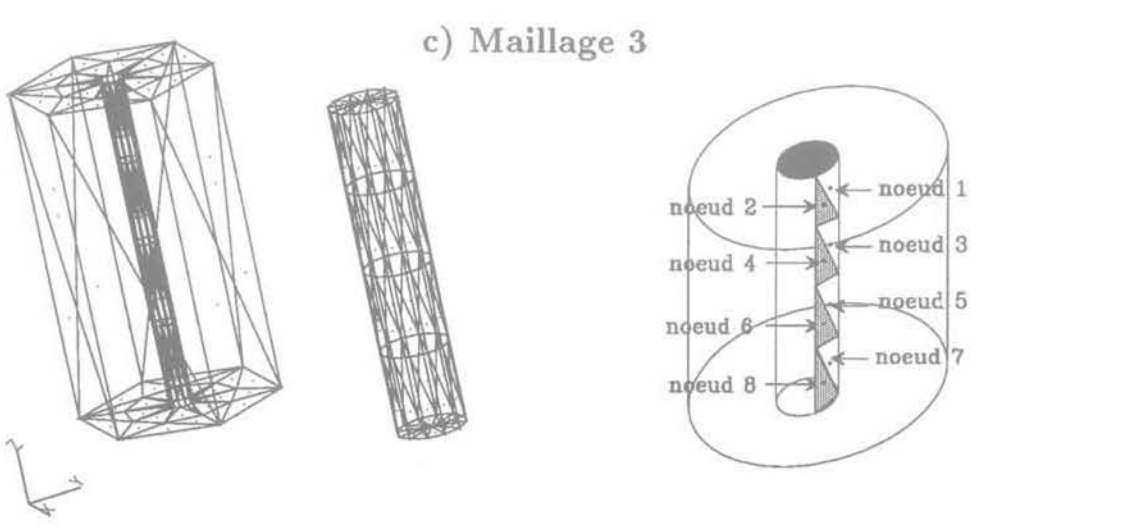
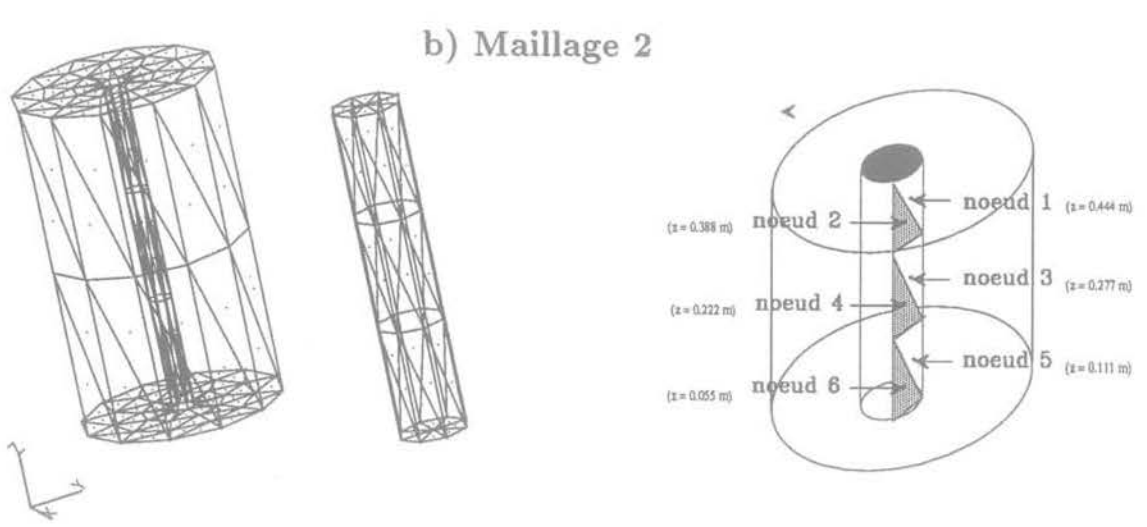
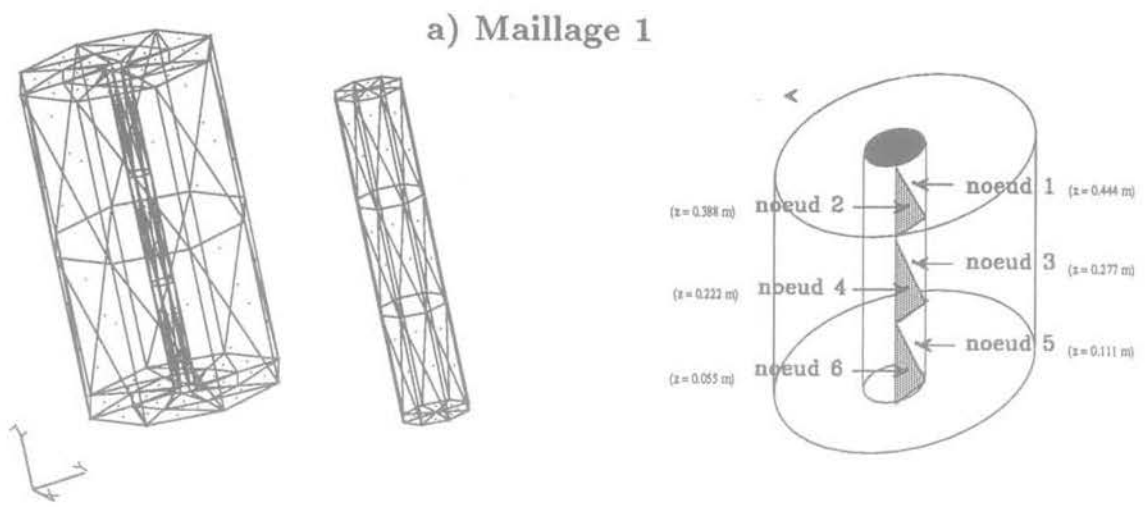


FIG. 13 Maillages testés pour la simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage, avec $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,9$.
 Mesh considered for the calibration chamber problem. Case 1: $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0.9$.

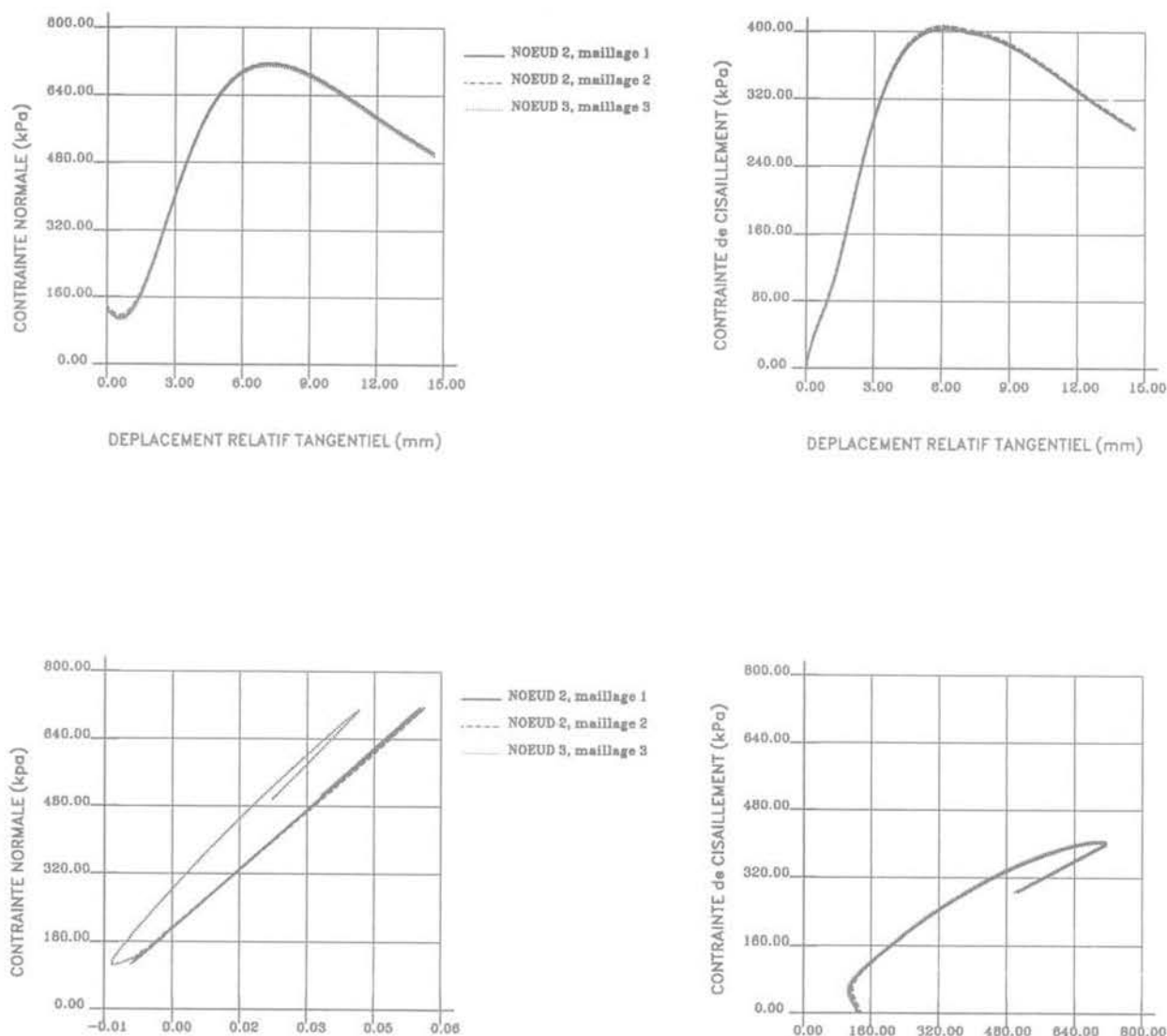


FIG. 14 Influence du maillage dans la simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage : comparaison au niveau des chemins locaux ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$).
Influence of the mesh in the local paths computed ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $I_D = 0,3$).

La comparaison des résultats relatifs aux chemins locaux (Fig. 14), à la mobilisation du frottement latéral (Fig. 15) et à l'évolution de la charge en tête du pieu pendant le chargement (Fig. 16) montrent une assez bonne indépendance des résultats numériques par rapport à la discrétisation spatiale utilisée. Il est clair notamment qu'un raffinement au-delà du maillage 1 serait inutile.

4.5

Étude de l'influence des dimensions de la chambre d'étalonnage

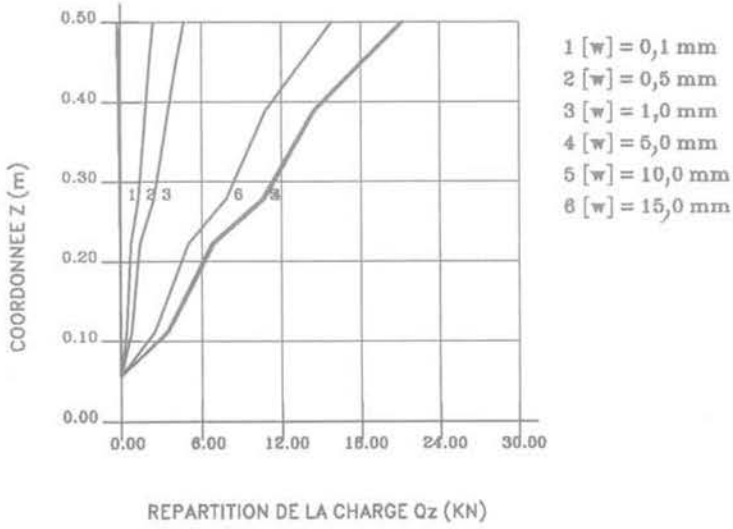
L'influence de la taille de la chambre d'étalonnage sur le frottement latéral est mal connue et sa quantifi-

cation est coûteuse. A cet effet, nous avons mené une étude paramétrique dont le but est de déterminer numériquement l'effet du diamètre de la chambre d'étalonnage sur le frottement latéral.

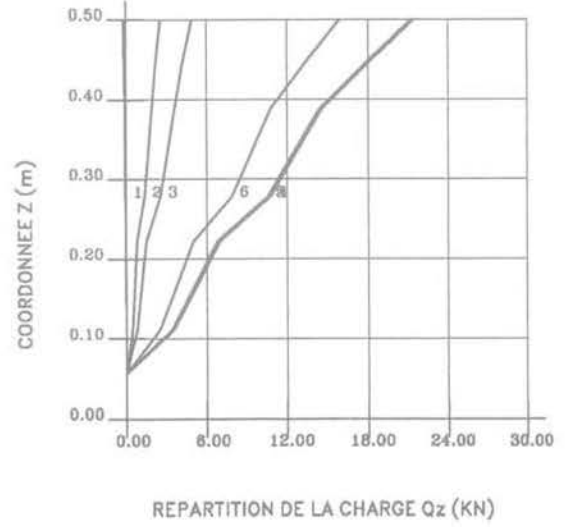
Les paramètres mécaniques ainsi que les conditions aux limites sont ceux du calcul correspondant à un sable dense ($D_r = 0,9$) et $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$.

La figure 17 permet de comparer les résultats numériques obtenus pour différents diamètres (d) de la chambre d'étalonnage. Il apparaît que la dilatance est d'autant plus importante (de même que le cisaillement mobilisé) que les parois de la chambre sont proches du fût du pieu. La même constatation est faite pour l'évolution de la charge en tête en fonction du déplacement (Fig. 18). Rouainia [19] obtient les mêmes conclusions en utilisant la méthode des éléments finis et le même modèle de comportement (loi d'interface).

a) Maillage 1



b) Maillage 2



c) Maillage 3

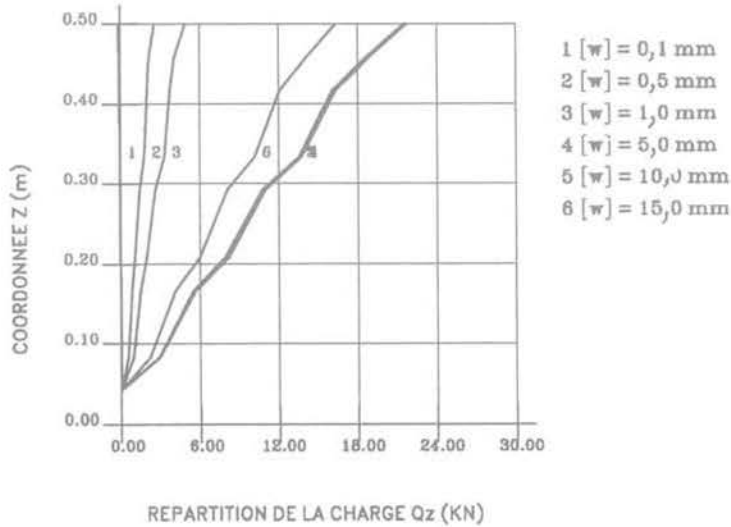


FIG. 15

Influence du maillage dans la simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage : comparaison de la mobilisation du frottement latéral ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$).
Influence of the mesh on the transfer curves computed. ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$).

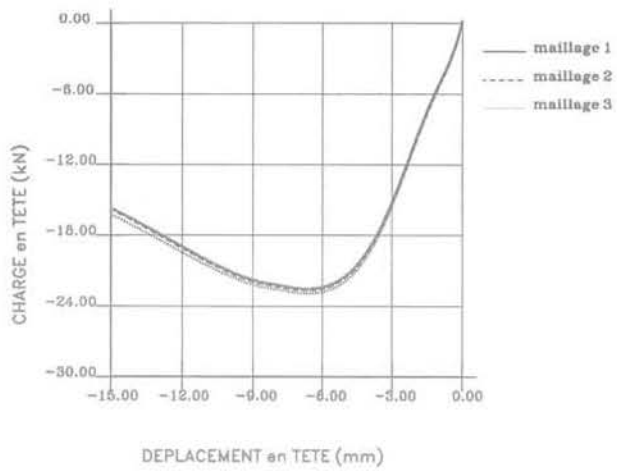


FIG. 16

Influence du maillage dans la simulation numérique d'un essai d'arrachement en chambre d'étalonnage : comparaison de l'évolution de la charge en tête durant le chargement ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$).
Influence of the mesh on the load versus prescribed displacement ($\sigma_v = 600 \text{ kPa}$, $D_r = 0,3$).

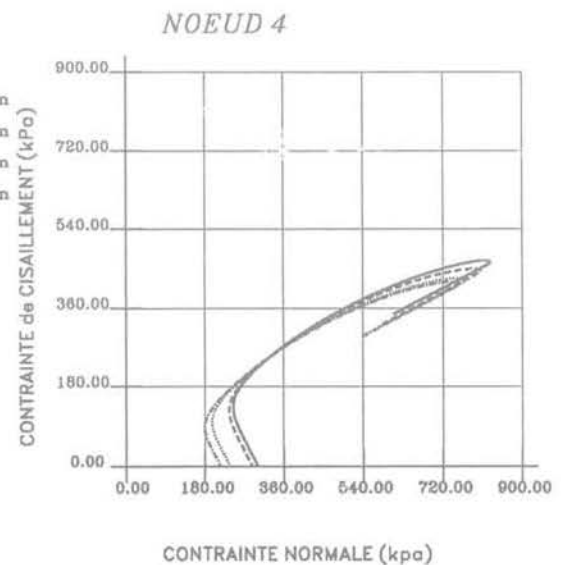
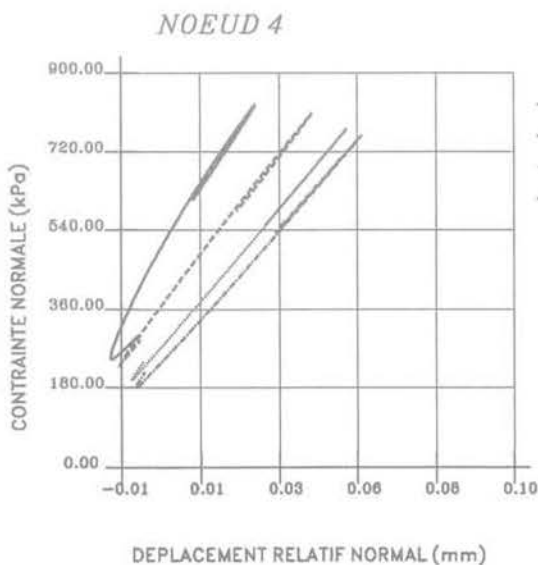
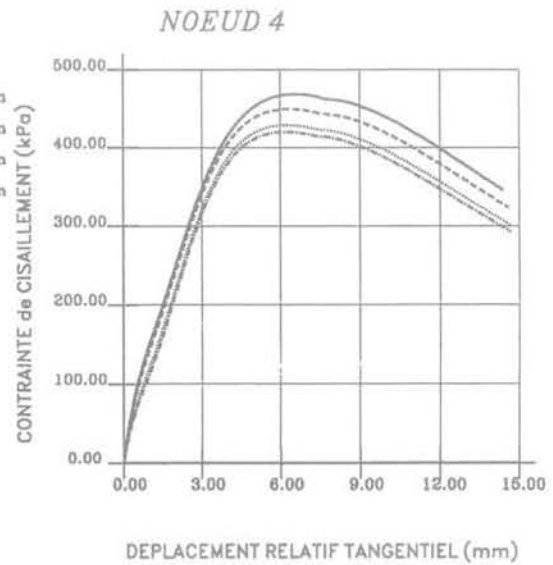
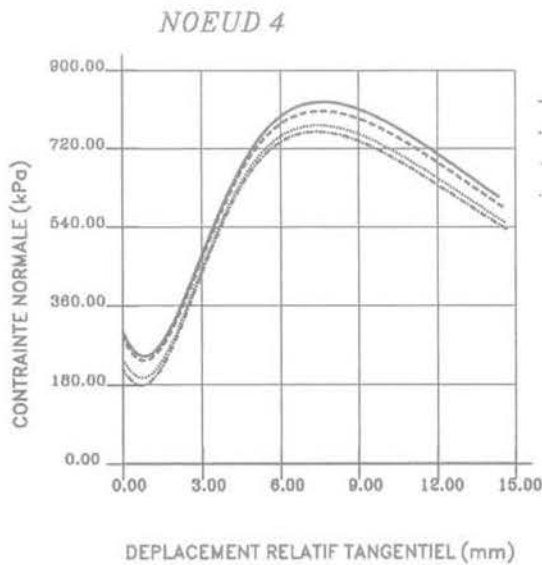


FIG. 17 Chemins locaux au nœud d'interface 4, $D_r = 0,9$, $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$: influence de la taille de la chambre d'étalonnage.
Local paths at node 4. Case 1: $I_D = 0,9$, $\sigma_v = 600 \text{ kPa}$. Influence of the size of the calibration chamber.

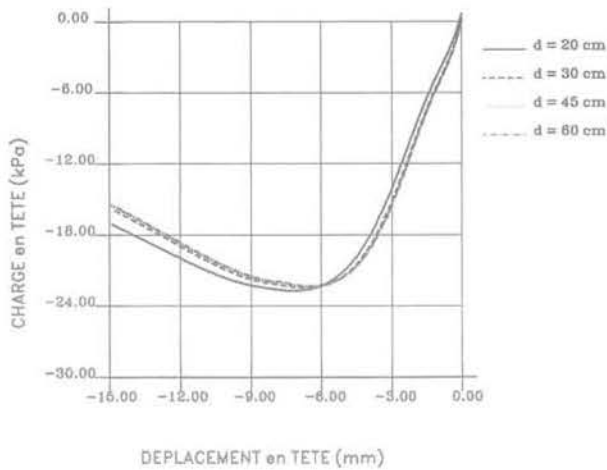


FIG. 18 Évolution de la charge en tête du pieu $D_r = 0,9$, $\sigma_v = 600$ kPa : influence de la taille de la chambre d'étalonnage. Load versus prescribed displacement. Case 1: $I_D = 0,9$, $\sigma_v = 600$ kPa.

L'ensemble des comparaisons menées permet ainsi de constater que les dimensions choisies pour la chambre d'étalonnage ($d = 30$ cm pour un pieu modèle de diamètre égal à 3,5 cm) ne sont pas très pénalisantes. Par ailleurs, le niveau d'hétérogénéité des contraintes de cisaillement mobilisées ne diffère pas de plus de 10 % entre le haut et le bas de la cuve, ce qui est très satisfaisant pour la poursuite de tels essais.

Conclusion

Les exemples numériques étudiés montrent l'efficacité des algorithmes proposés pour traiter les problèmes aux limites impliquant le contact avec frottement par la méthode des équations intégrales aux frontières.

Moyennant une certaine simplification de la physique, cette méthode offre de grandes possibilités pour l'étude de problèmes de contact en général, et en interaction sol-structure en particulier. Notre problème de contact suppose la concentration de non-linéarités à l'interface de manière à pouvoir considérer les deux solides en contact comme élastiques. En géomécanique cela est possible pour des problèmes où les phénomènes de frottement sont dominants, comme c'est le cas pour le calcul de la capacité portante des pieux très longs sous chargement axial.

La validation de notre approche de l'interaction sol-structure a été réalisée par la simulation numérique d'essais d'arrachement de pieux modèles en laboratoire. Ces simulations constituent une première étape de la modélisation numérique du renforcement des ouvrages en terre par clouage.

Les simulations réalisées ont mis en évidence l'applicabilité à des cas réels du modèle incrémental d'interface avec de très bons résultats. Les résultats des calculs montrent également que les chemins locaux le long de pieux semblent être gouvernés par la rigidité normale au pieu, fonction du module de cisaillement (ou module pressiométrique) du massif de sol et du rayon du pieu. Ce point semble confirmer l'approche proposée par Boulon et Foray [4].

Bibliographie

- [1] Andersson T. – Boundary Elements in two Dimensional Contact and Friction. Ph.D Thesis, Linköping University, Sweden, 1982.
- [2] Boulon M. – Contribution à la mécanique des interfaces sols-structures. Application au frottement latéral des pieux. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Université Joseph-Fourier de Grenoble, 1988.
- [3] Boulon M. – Basic features of soil-structure interface behaviour. *Computers and Geotechnics*, 7, 1989, pp. 115-131.
- [4] Boulon M., Foray P. – Physical and numerical simulation of lateral shaft friction along offshore piles in sand. IInd International Conference on Numerical and Offshore piling, Nantes, 21-22 mai 1986.
- [5] Boulon M., Garnica P. – Constitutive interpolation and soil-structure directionally dependent interface law. Proc. of the second ENUMGE, Santander, Spain, September 1990, pp. 45-46.
- [6] Boulon M., Plytas C. – Soil-structure directionally dependent interface constitutive equation. Application to the prediction of shaft friction along piles. IInd International Conference on Numerical Models in Geomechanics. Ghent, Belgium, March, 1986, pp. 43-54.
- [7] Brebbia C. – The Boundary element Method for engineers. Pentech Press, 1984.
- [8] Danson D. – Linear isotropic elasticity with body forces. Progress in Boundary Element Method (edited by C. Brebbia). Pentech Press, 1983.
- [9] Essautier M. – Frottement latéral des pieux en milieu pulvérulent. Thèse à l'INPG, Grenoble, 1986.
- [10] Foray P. – Approche expérimentale du comportement des fondations profondes. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, INPG, Grenoble, 1991.
- [11] Garnica P. – Simulation numérique du frottement entre solides par équations intégrales aux frontières et modèle d'interface non linéaire, Application aux pieux. Thèse de Doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble, 1993.
- [12] Hoteit N. – Étude du cisaillement d'interface à rigidité normale imposée et applications. Thèse de Doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble, 1989.
- [13] Kwak B.M., Lee S.S. – A complementary problem formulation for two dimensional frictional contact problems. *Computers and Structures*, vol. 28, 4, 1988, pp.469-480.
- [14] Marchina P. – Modélisation de l'interaction sol-structure par la méthode des équations intégrales aux frontières et loi d'interface. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 1989.
- [15] Paris F., Garrido J.A. – On the use discontinuous element in two dimensional contact problems. Proc. of the 7th Int. Conf. on Boundary Elements, Villa Olmo, Italie. Brebbia Maier Eds., Springer-Verlag, 1985.
- [16] Plytas C. – Contribution à l'étude expérimentale et numérique des interfaces sols granulaires-structures. Thèse de Doctorat, USMG, Grenoble, octobre 1985.
- [17] Puech A., Foray P., Boulon M., Desrues J. – Calcul des pieux à l'arrachement à partir d'un modèle numérique en contraintes effectives. VII ECSMFE, Brighton, 1979.
- [18] Renoud-Lias B. – Étude du pressiomètre en milieu pulvérulent. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 1978.
- [19] Rouainia M. – Modélisation de l'interaction sol-structure par éléments finis de haute précision et loi d'interface incrémentale non linéaire, Application aux pieux. Thèse de Doctorat, USMG, Grenoble, octobre 1985.
- [20] Selvadurai A.P.S. – Boundary element modelling of interface phenomena. Topics in Boundary Element Research (edited by C. Brebbia), Volume 4, Applications in Geomechanics, Springer-Verlag, 1987.
- [21] Trompette Ph. – Mécanique des structures. Paris, Masson, 1992.
- [22] Wernick E. – Skin friction of cylindrical anchors in non-cohesive soils. Symposium on soil reinforcing and stabilising techniques, Sidney, Australia, 1978.