

# Application du concept probabiliste de sécurité sur la vérification de la stabilité d'ensemble des murs de soutènement ancrés avec la cinématique des solides rigides

**L. BELABED**

*Institut de Génie Civil  
Centre universitaire Guelma  
BP 401, 24000 Guelma  
Algérie*

## Résumé

Dans cet article, on propose un modèle mécanique de rupture basé sur la méthode cinématique des solides de rupture rigides pour la vérification de la stabilité d'ensemble des murs de soutènement ancrés. Le développement des équations d'états limites correspondantes à ce modèle de rupture est effectué conformément au nouveau concept probabiliste de sécurité. Les surfaces de glissement critiques sont déterminées itérativement. Les études paramétriques ont été faites pour des différents types de sols. Des connaissances utiles pour la pratique ont été obtenues.

## Application of the probabilistical safety concept for the overall stability assessment of anchored retaining walls with kinematical rigid bodies

## Abstract

In this paper, a mechanical failure model is proposed on the basis of the kinematic method of rigid failure bodies for the overall stability assessment of anchored retaining walls. The limit state equations corresponding to this failure model are developed according to the new probabilistical safety concept. The critical slip surfaces are determined iteratively. The parametric studies were carried out for various types of soils. Useful knowledge for the practice were gained.

## LISTE DES SYMBOLES

- $G_i$  : poids propre du solide de rupture  $i$ .  
 $P_i$  : charge proportionnelle au solide de rupture  $i$ .  
 $q$  : surcharge.  
 $E_p$  : force de pression passive du sol.  
 $C_i$  : force de cohésion.  
 $Q_i$  : résultante des forces horizontales et verticales.  
 $A_i$  : force d'ancrage.  
 $\theta_i$  : inclinaison de la surface de glissement avec l'horizontale.  
 $e$  : inclinaison de l'ancrage avec l'horizontale.  
 $\delta_a$  : frottement actif mur-sol.  
 $\delta_p$  : frottement passif mur-sol.  
 $h$  : hauteur du mur.  
 $t$  : fiche du mur dans le sol.  
 $L_a$  : longueur d'ancrage.  
 $\varphi$  : angle de frottement interne.  
 $c$  : cohésion.  
 $\gamma$  : poids spécifique du sol.  
 $V\varphi$  : coefficient de variation du frottement interne.

1

## Introduction

La vérification de la stabilité d'ensemble des murs de soutènement ancrés s'effectue généralement au moyen de la vérification de la rupture le long de la surface de glissement profonde (sécurité intérieure) et de la rupture circulaire du sol (sécurité extérieure). En général, on renonce par expérience à la deuxième vérification hormis des cas exceptionnels (p. ex. charges importantes). La longueur d'ancrage nécessaire est déterminée avec la vérification citée en premier. Dans ce contexte, le procédé de Kranz [13] est fréquemment utilisé dans la pratique bien qu'il soulève des critiques [2, 3]. La méthode cinématique des solides de rupture rigides offre une autre alternative pour le jugement de la sécurité des murs de soutènement ancrés.

Cette méthode s'est fort imposée dans les derniers temps avant tout à cause de sa fiabilité et de sa faculté de généralisation aux différents problèmes de rupture (glissement). Les principes de la méthode cinématique sont donnés entre autres dans [2, 7-9]. L'application de la méthode cinématique à la modélisation des mécanismes de rupture des murs de soutènement ancrés implique que :

- le mur subit des déplacements parallèles,
- les solides de rupture rigides sont mobiles,
- une surface de glissement intérieure est placée à chaque point de changement de direction de la surface de glissement extérieure.

L'objectif de ce travail est de vérifier la compatibilité cinématique et statique du modèle mécanique proposé sur la base de la méthode cinématique des solides de rupture rigides dans le cas de rupture des murs de soutènement à double ancrage le long de la surface de glissement profonde.

L'investigation des mécanismes de rupture s'effectue conformément au nouveau concept probabiliste de sécurité d'après le règlement allemand Grusibau « Règles fixant les exigences en matière de sécurité des ouvrages de construction » [10] et la norme allemande DIN 1054.100 [5] ainsi que l'Eurocode [4]. La base de toute étude probabiliste est la modélisation mécanique du mécanisme de rupture traité. Cela se traduit analytiquement par la formulation d'une équation d'état limite dans laquelle les résistances et les sollicitations sont comparées.

2

## Modèle mécanique

En se basant sur les travaux de Gäßler [6], Goldscheider [8] et Goldscheider/Kolymbas [9] des solides de rupture rigides se forment, en état de rupture d'ensemble, devant et derrière le mur (Fig. 1a). Ces solides sont séparés entre eux par des surfaces de glissement intérieures (secondaires) et subissent entre eux des petits mouvements sur des surfaces de glissement extérieures et intérieures. Dans le reste du massif le sol reste rigide (sans déformation).

Dans la zone passive, devant le pied du mur, les deux solides de rupture sont remplacés par la butée

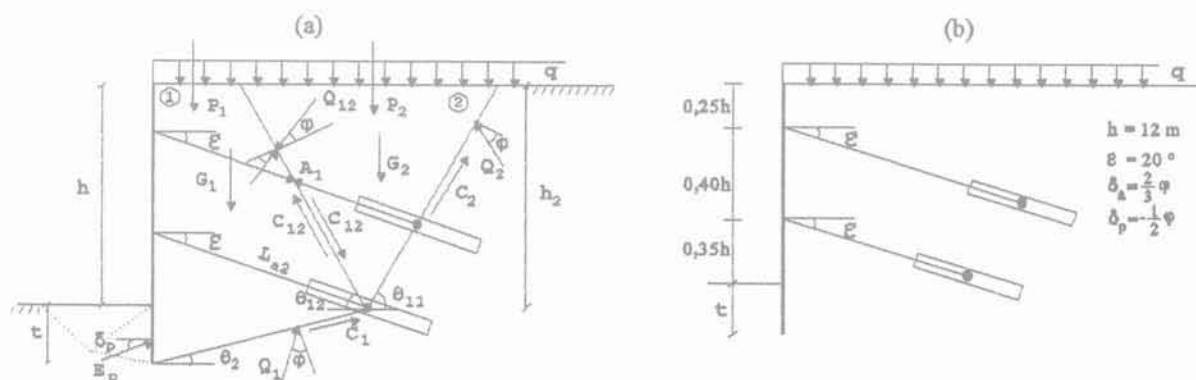


FIG. 1 Mécanisme de rupture et géométrie d'un mur de soutènement à double ancrage. (a) : Rupture de l'ancrage inférieur. (b) : Géométrie.  
Failure mechanism and geometry of a double-propped retaining wall. (a) : Failure of the lower anchor. (b) : Geometry.

$E_p$  de Gudehus/Gross [11]. La recherche de l'inclinaison critique de la surface de glissement (extérieure) profonde avec l'horizontale ( $\theta_2$ ) se fait itérativement jusqu'à ce que la longueur d'ancrage nécessaire est obtenue qui remplit juste les conditions d'équilibre du système. L'inclinaison de la surface de glissement extérieure avec l'horizontale ( $\theta_{11}$ ) est supposée égale à celle de la surface de glissement active de Coulomb ( $\pi/4 + \varphi/2$ ).

Gäßler [6] a pu démontrer à travers des essais sur modèles que l'inclinaison la plus critique de la surface de glissement intérieure avec l'horizontale ( $\theta_{12}$ ) est approximativement égale à celle de la surface de glissement active de Coulomb ( $\pi/4 + \varphi/2$ ). Mais, jusqu'à maintenant on ne connaît pas l'inclinaison de la surface de glissement intérieure avec l'horizontale ( $\theta_{12}$ ) lorsqu'elle coupe des ancrages. Ce problème fait l'objet du présent article. Dans ce but, on étudie la rupture de l'ancrage inférieur d'un mur de soutènement à double ancrage simplement buté en pied (Fig. 1a).

La recherche de l'inclinaison la plus critique de la surface de glissement intérieure avec l'horizontale ( $\theta_{12}$ ) s'effectue itérativement suivant la formule suivante :

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \Delta\theta \quad (1)$$

où  $\Delta\theta$  est une variable qui peut prendre des valeurs positives et négatives. Dans ce but, un programme de calcul [2] est développé par l'auteur. Les résultats des calculs sont représentés sur la figure 4.

Pour formuler l'équation d'état limite correspondante au mécanisme de rupture représenté sur la figure 1a conformément au concept probabiliste de sécurité, les deux solides de rupture actifs (1) et (2) sont analysés séparément.

## 2.1

### Solide de rupture (2)

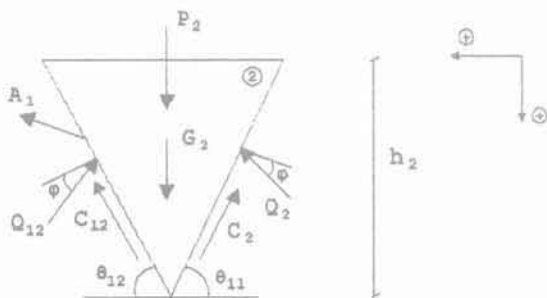


FIG. 2 Solide de rupture (2) avec forces.  
Slip body (2) with forces.

Équilibre des forces horizontales et verticales :

$$C_{12} \cos \theta_{12} - C_2 \cos \theta_{11} + A_1 \cos \varepsilon - Q_{12} \sin(\theta_{12} - \varphi) + Q_2 \sin(\theta_{11} - \varphi) = 0 \quad (2)$$

$$G_2 + P_2 - C_{12} \sin \theta_{12} - C_2 \sin \theta_{11} - A_1 \sin \varepsilon - Q_{12} \cos(\theta_{12} - \varphi) - Q_2 \cos(\theta_{11} - \varphi) = 0 \quad (3)$$

De l'Éq. (3) on tire :

$$Q_2 = \frac{G_2 + P_2 - C_{12} \sin \theta_{12} - C_2 \sin \theta_{11} - A_1 \sin \varepsilon - Q_{12} \cos(\theta_{12} - \varphi)}{\cos(\theta_{11} - \varphi)} \quad (4)$$

En substituant l'Éq. (4) dans l'Éq. (2) et après transformations on obtient la résultante  $Q_{12}$  qui agit sur la surface de glissement intérieure :

$$Q_{12} = \frac{(G_2 + P_2) \sin(\theta_{11} - \varphi) - C_2 \cos \varphi - A_1 \cos(\theta_{11} - \varphi + \varepsilon)}{\sin(\theta_{12} + \theta_{11} - 2\varphi)} \quad (5)$$

## 2.2

### Solide de rupture (1)

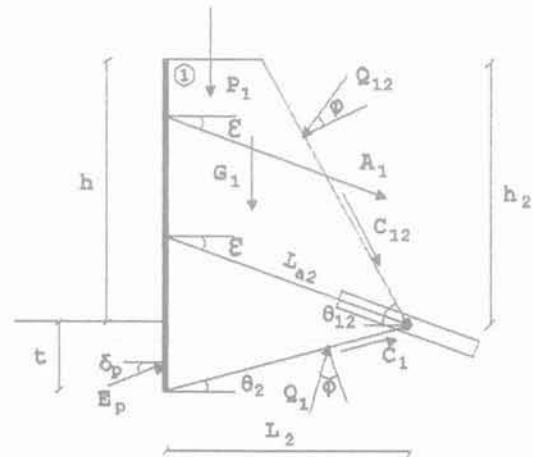


FIG. 3 Solide de rupture (1) avec forces.  
Slip body (1) with forces.

Équilibre des forces horizontales :

$$-E_p \cos \delta_p - C_1 \cos \theta_2 - C_{12} \cos \theta_{12} - A_1 \cos \varepsilon + Q_1 \sin(\theta_2 - \varphi) + Q_{12} \sin(\theta_{12} - \varphi) = 0 \quad (6)$$

Équilibre des forces verticales :

$$G_1 + P_1 - E_p \sin \delta_p - C_1 \sin \theta_2 + C_{12} \sin \theta_{12} + A_1 \sin \varepsilon - Q_1 \cos(\theta_2 - \varphi) + Q_{12} \cos(\theta_{12} - \varphi) = 0 \quad (7)$$

De l'Éq. (6) on tire :

$$Q_1 = \frac{E_p \cos \delta_p + C_1 \cos \theta_2 + C_{12} \cos \theta_{12} + A_1 \cos \varepsilon - Q_{12} \sin(\theta_{12} - \varphi)}{\sin(\theta_2 - \varphi)} \quad (8)$$

En substituant l'Éq. (8) dans l'Éq. (7), on obtient après transformations algébriques :

$$E_p \cos(\delta_p - \theta_2 + \varphi) + C_1 \cos \varphi + C_{12} \cos(\theta_{12} + \theta_2 - \varphi) + A_1 \cos(\theta_2 - \varphi + \varepsilon) - (G_1 + P_1) \sin(\theta_2 - \varphi) - Q_{12} \sin(\theta_{12} + \theta_2 - 2\varphi) = 0 \quad (9)$$

Finalement, en substituant la valeur de  $Q_{12}$  d'après l'Éq. (5) dans l'Éq. (9), on obtient l'équation d'état limite générale du mécanisme de rupture (Fig. 1a) :

$$E_p \cos(\delta_p - \theta_2 + \varphi) + C_1 \cos \varphi + C_{12} \cos(\theta_{12} + \theta_2 - \varphi) + A_1 \cos(\theta_2 - \varphi + \varepsilon) + C_2 m \cos \varphi - \{(G_1 + P_1) \sin(\theta_2 - \varphi) + [(G_2 + P_2) \sin(\theta_{11} - \varphi) + A_1 \cos(\theta_{11} - \varphi + \varepsilon)] m\} = 0 \quad (10)$$

avec

$$m = \frac{\sin(\theta_{12} + \theta_2 - 2\varphi)}{\sin(\theta_{12} + \theta_{11} - 2\varphi)} \quad (11)$$

On procède de la même manière pour développer l'équation d'état limite correspondante à la rupture de l'ancrage supérieur du mur de soutènement à double ancrage représenté sur la figure 1b.

## Modèle stochastique

Le procédé de Hasofer/Lind [12] constitue la base théorique du nouveau concept probabiliste de sécurité sur lequel le règlement allemand Grusibau [10] et la norme allemande DIN 1054.100 [5] sont fondés. Principe et exemples d'application sont expliqués entre autres dans [1, 2, 14, 15]. D'après le concept probabiliste de sécurité on distingue les paramètres de base aléatoires (variables aléatoires) et les paramètres de base non aléatoires (déterministes). Une variable aléatoire est définie statistiquement par un coefficient de variation, un écart-type et une fonction de distribution de probabilité. La dispersion des variables aléatoires est couverte par des facteurs partiels de sécurité. Les valeurs caractéristiques des variables aléatoires sont multipliées ou divisées par ces facteurs. D'après le concept probabiliste de sécurité, les sollicitations sont majorées et la capacité portante de la structure est minorée. Les valeurs ainsi obtenues sont appelées valeurs de calcul à savoir de sollicitations et de la capacité portante. Dans ce contexte, DIN 1054.100 [5] propose dans le cas de rupture du sol (état limite ultime) les relations suivantes :

Angle de frottement interne  $tg\varphi_d = tg\varphi_k/1,25$

Cohésion  $c_d = c_k/1,60$

Surcharge  $q_d = 1,30 q_k$

Poids spécifique  $\gamma_d = 1,00 \gamma_k$  (dispersion négligeable).

L'indice « d » désigne une valeur de calcul et l'indice « k » une valeur caractéristique.

Les études paramétriques sont faites avec les combinaisons suivantes des paramètres du sol  $\varphi$  et  $c$  (tableau I), qui sont considérées comme relativement typiques en mécanique du sol [14].

TABLEAU I Paramètres du sol  
Shear parameters.

Paramètre	40	35	30	25	20
Angle de frottement interne $\varphi$ [°]					
Cohésion $c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	0	5	10	20	35

Les données statistiques des variables aléatoires sont regroupées dans le tableau II. Les facteurs partiels de sécurité sont donnés par DIN 1054.100 [5]. Le reste des paramètres de base est considéré comme non aléatoires (déterministes). Pour plus de détails voir [2, 7, 14, 15]. Le problème de l'autocorrélation des sols n'est pas traité dans cette étude.

On utilise un programme de calcul [2] dans lequel les équations d'état limite développées ci-dessus ont été implémentées. On part d'une valeur initiale de la longueur d'ancrage que l'on fait varier jusqu'à ce que la surface de glissement profonde la plus critique (longueur d'ancrage nécessaire minimale) est atteinte qui assure juste l'équilibre du système. La sécurité correspondante, exprimée à travers l'indice de sécurité  $\beta$ , est calculée avec la théorie de fiabilité de premier ordre. Le programme de calcul [2] est développé sur la base de cette dernière théorie en Turbo Pascal. Il permet le calcul de la sécurité du système qui est exprimée par l'indice de sécurité  $\beta$  ou par la probabilité de rupture  $P_r$ .

TABLEAU II Données statistiques des variables aléatoires.

Statistical data of the basic variables.

Variable aléatoire	Coefficient de variation	Distribution	Facteur partiel de sécurité
Angle de frottement interne $\varphi$ [°]	7,5 %	Log-normale	1,25
	10 %		
Cohésion $c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	25 %	Log-normale	1,60
Surcharge $q$ [kN/m <sup>2</sup> ]	40 %	Extrême (Type I)	1,30
Poids spécifique $\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	5 %	Normale	1,00

## Résultats

Les résultats illustrés sur la figure 4 montrent que l'inclinaison critique de la surface de glissement intérieure avec l'horizontale ( $\theta_{12}$ ) est égale, avec une exactitude suffisante, à l'inclinaison de la surface de glissement active de Coulomb ( $\theta_{12} = \pi/4 + \varphi/2$ ). Sur la figure 4, on constate que plus l'inclinaison  $\theta_{12}$  diffère de l'inclinaison de la surface de glissement active de Coulomb, plus la valeur de l'indice de sécurité  $\beta$  augmente.

Des investigations pareilles ont été effectuées pour les murs de soutènement à triple ancrage [2]. Les résultats des calculs ont montré que la surface de glissement intérieure critique en coupant deux ancrages est à peu près 5° jusqu'à 10° plus inclinée que la surface de glissement active de Coulomb. Cette différence devient encore plus grande avec l'augmentation du nombre des ancrages coupés (cas des murs avec plus de trois nappes d'ancrages). C'est pourquoi, d'autres investigations sont nécessaires.

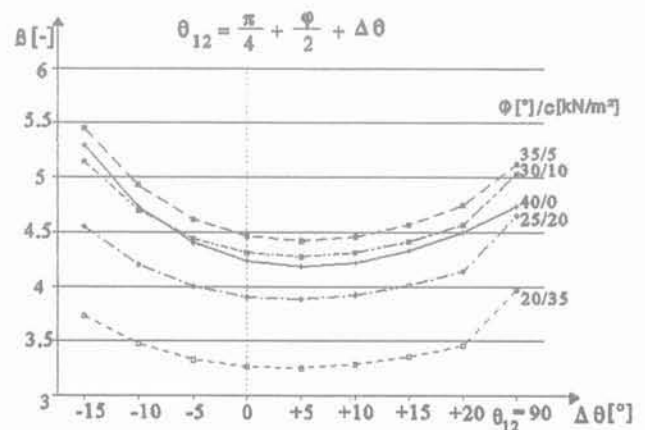


FIG. 4 Détermination de l'inclinaison critique de la surface de glissement intérieure.  
Determination of the unfavourable inclination of the internal slip surface.

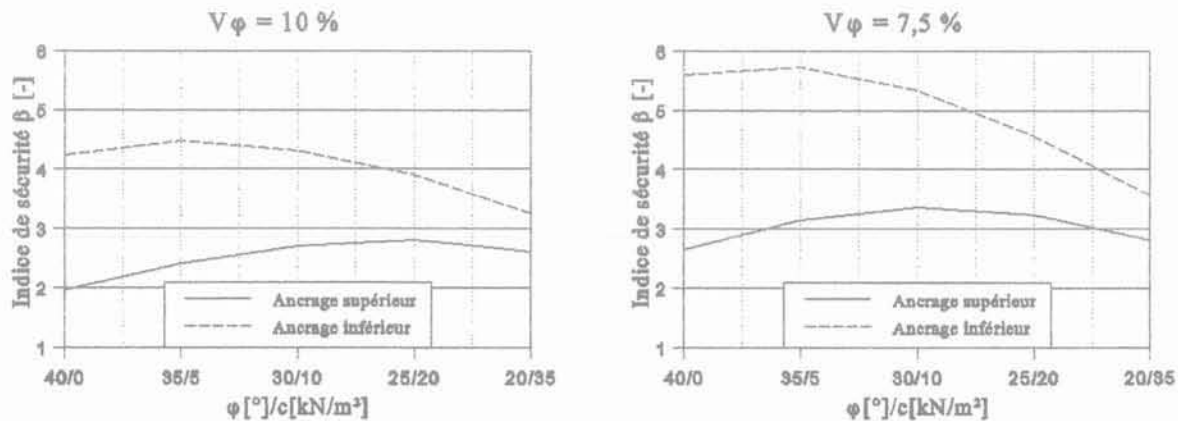
D'après le tableau III on constate que les ancrages sont d'autant plus longs que la cohésion est plus grande et l'angle de frottement interne est plus petit.

**TABEAU III** Longueurs d'ancrages [m].  
Anchor lengths [m].

$\phi$ [°]/c [kN/m <sup>2</sup> ]	40/0	35/5	30/10	25/20	20/35
Ancrage supérieur	9,42	10,52	11,81	12,70	12,85
Ancrage inférieur	7,18	8,09	9,19	9,91	9,86

Les résultats des études probabilistes représentés sur la figure 5 montrent que la sécurité de l'ouvrage vis-à-vis d'une rupture au niveau de l'ancrage supérieur (indice de sécurité  $\beta$ ) est clairement plus petite que celle au niveau de l'ancrage inférieur. Les résultats d'autres analyses [1, 2] confirment cette constatation. Plus l'ancrage est profond ou plus la surface de glissement profonde est en pente douce, plus l'indice de sécurité  $\beta$  croît.

Le coefficient de variation d'une variable aléatoire déterminante (angle de frottement interne  $\phi$ , cohésion c) a une influence considérable sur l'indice (niveau) de sécurité  $\beta$ . L'indice de sécurité  $\beta$  est d'autant plus petit



**FIG. 5** Indices de sécurité  $\beta$ .  
Safety indexes  $\beta$ .

que le coefficient de variation de l'angle de frottement interne ( $V\phi$ ) est plus grand (Fig. 5).

5

## Conclusion

La stabilité d'ensemble des murs de soutènement à double ancrage est vérifiée par l'étude de la rupture le long de la surface de glissement profonde. Dans ce but, un modèle mécanique est proposé sur la base de la méthode cinématique des solides de rupture rigides. L'étude de ce problème de stabilité est faite suivant le nouveau concept probabiliste de sécurité. L'équation d'état limite décrivant le mécanisme de rupture a été développée. Les surfaces de glissement critiques ont

été recherchées itérativement pour différents types de sols. L'influence des ancrages sur le parcours (inclinaison) des surfaces de glissement est mise bien en évidence. D'autres connaissances intéressantes pour la pratique ont été dégagées lors de ce travail :

- Les ancrages sont d'autant plus longs que la cohésion est plus grande et l'angle de frottement interne est plus petit.
- La sécurité de l'ouvrage vis-à-vis d'une rupture au niveau de l'ancrage supérieur (indice de sécurité  $\beta$ ) est clairement plus petite que celle au niveau de l'ancrage inférieur.
- Le coefficient de variation d'une variable aléatoire déterminante (angle de frottement interne  $\phi$ , cohésion c) a une influence considérable sur l'indice de sécurité  $\beta$ .

## Bibliographie

- [1] Belabed L. - Standsicherheitsuntersuchung zweifach verankerter Stützwände mit der kinematischen Starrkörpermethode. *Geotechnik*, vol. 19, 1995, p. 171-174.
- [2] Belabed L. - Zuverlässigkeitsuntersuchung des Tragsystems « mehrfach verankerte Stützwände » mit probabilistischen Methoden. Thèse de doctorat, Bauhaus-Universität Weimar (Germany), 1996.
- [3] Belabed L. - Genauere Modellierung der Bruchmechanismen bei mehrfach verankerten Stützwänden. *Bautechnik*, vol. 73, 1996, p. 776-780.
- [4] CEN - Geotechnical design, general rules. European Committee for Standardization (CEN), Eurocode. Nederlands Normalisatie-instituut (NNI), Delft, Prestandard (ENV), 1994.
- [5] DIN 1054.100 - Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau. Deutsches Institut für Normung, 1995.
- [6] Gäbler G. - Anwendung des statistischen Sicherheitskonzepts auf verankerte Wände und vernagelte Wände. Vorträge der Baugrundtagung, Braunschweig, Deutsche Gesellschaft für Geotechnik, 1982, p. 49-82.
- [7] Gäbler G. - Vernagelte Geländesprünge - Tragverhalten und Standsicherheit. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik, Universität Karlsruhe, Heft 108, 1987.

## Bibliographie

---

- [8] Goldscheider M. – Standsicherheitsnachweis mit zusammengesetzten Starrkörper-Bruchmechanismen. *Geotechnik*, vol. 2, 1979, p. 130-139.
- [9] Goldscheider M., Kolymbas D. – Berechnung der Standsicherheit mehrfach verankerter Stützwände. *Geotechnik*, vol. 4, 1980, p. 156-164.
- [10] GRUSIBAU – Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen. Éditeur : Deutsches Institut für Normung (DIN) e.V., Beuth Verlag, Berlin-Köln, 1981.
- [11] Gudehus G. – Erddruckermittlung. *Grundbautaschenbuch*, Teil 1, 4. Auflage, p. 289-361, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1990.
- [12] Hasofer A.M., Lind N.C. – Exact and invariant second-moment code format. *ASCE proceedings*, vol. 100, n° EM 1, 1974, p. 111.
- [13] Kranz E. – Über die Verankerung von Spundwänden. *Mitteilungen Wasserbau und Bauforschung*, Heft 11, 2. Auflage, Berlin, Verlag Ernst & Sohn, 1953.
- [14] Nottrodt H.P. – Beitrag zur Einführung semiprobabilistischer Methoden in der Geotechnik. Thèse de doctorat, Bauhaus-Universität Weimar (Germany), 1990.
- [15] Pottharst R. – Erläuterungen des statistischen Sicherheitskonzeptes am Beispiel des Grundbruchs. *Vorträge der Baugrundtagung*, Braunschweig, Deutsche Gesellschaft für Geotechnik, 1982, p. 9-47.